TD 11 : Intégrales généralisées

Exercice ($\star$) 1 *(Fonction Gamma)*
Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ *converge si et seulement si* $x > 0$.

Exercice ($\star\star$) 1 *(Grand Classique)*
En revenant à la défintion montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_2^{\infty} \ln(1-\frac{1}{t^2})dt$ *converge et déterminer sa valeur.*
Démontrer d'une autre façon la convergence.

Exercice ($\star\star$) 2 *(Idem)*
Nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln(thx)dx$ *?*

Exercice ($\star\star\star$) 1 *(Intégration des relations de comparaison)*
Pour une série $\sum u_n$ *de nombres réels, on note* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de ses sommes partielles.*
Si de plus $\sum u_n$ *est convergente, on note* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de ses restes.*
Soient a *un réel et* $b > a$ *(*b *pouvant être égal à* $+\infty$*) ainsi que* f, g *continues par morceaux sur* $[a, b[= I$ *et à valeurs strictement positives.*
1) On suppose que $\displaystyle\int_I g$ *converge et on pose, pour* $x \in I$, $R(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ *et* $T(x) = \displaystyle\int_x^b g(t)dt$.
Etablir que :
i) $f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x)) \Longrightarrow R(x) = \underset{x\to b}{o}(T(x))$.
ii) $f(x) \underset{x\to b}{\sim} (g(x)) \Longrightarrow R(x) \underset{x\to b}{\sim} T(x)$.
2) On suppose cette fois que $\displaystyle\int_I g$ *diverge et on pose, pour* $x \in I$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ *et* $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$.
Etablir que :
i) $f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x)) \Longrightarrow F(x) = \underset{x\to b}{o}(G(x))$.
Montrer à l'aide d'exemples que l'on ne peut, en général, rien dire de la nature de $\displaystyle\int_I f$.
ii) $f(x) \underset{x\to b}{\sim} (g(x)) \Longrightarrow F(x) \underset{x\to b}{\sim} G(x)$.
Que dire de la nature de $\displaystyle\int_I f$ *?*
3) Déterminer un équivalent si $x \to 0^+$ *de* $\displaystyle\int_x^1 \frac{t}{\arcsin(t)}dt$.
En déduire un équivalent simple en 0^+ *de* $\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{t}{\arcsin(t)}dt$.
4)i) A l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'en $+\infty$ *on a :*
$\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}$.
ii) Etablir plus généralement et pour $n \in \mathbb{N}$ *et toujours en* $+\infty$ *que :*
$\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)})$.
5) Justifier le développement asymptotique suivant en $+\infty$ *:* $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}dt = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o(\frac{e^x}{x^3})$.