

Espaces Vectoriels Normés

1 Introduction

Il s'agit d'étendre la notion de convergence d'une suite à des objets mathématiques aussi divers que les n -uplets de réels ou de complexes, les matrices et surtout les fonctions. Pour cela il faut conceptualiser la notion d'approximation qui, pour les cas connus se matérialisait via la valeur absolue ou le module; la généralisation proposée ici repose sur l'idée de norme, déjà rencontrée en géométrie. Cette parenté s'avèrera relativement féconde.

Dans tout le document E désigne un $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) espace vectoriel.

2 Normes

2.1 Définitions

Définition 1 On appelle norme sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (homogénéité).
- ii) $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (séparation).
- iii) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Notation 1 La tradition fait qu'une norme générique se note plutôt : $\|\cdot\|$ au lieu de N .

Définition 2 Un espace vectoriel normé (evn en abrégé) est la donnée du couple $(E, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ une norme sur E .

Il est tacite désormais que nous nous plaçons dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$

Définition 3 La distance associée à $\|\cdot\|$ est l'application

$$d : \begin{cases} E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \rightarrow d(x, y) = \|x - y\| \end{cases}$$

2.2 Propriétés

On reste dans le contexte général précisé.

Proposition 1 i) $\forall x \in E, \|-x\| = \|x\|$.

ii) $\|0_E\| = 0$.

iii) $\forall (x, y) \in E^2, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ (inégalité triangulaire inverse).

iiii) Si $x \neq 0_E$, $\pm \frac{x}{\|x\|}$ est unitaire (i.e de norme 1).

iiii) $\forall (x, y, z) \in E^3, d(y, x) = d(x, y)$ et $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Par ailleurs $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

On notera que ces trois propriétés sont conformes à ce que l'on attend d'une distance.

2.3 Exemples fondamentaux

On aura à coeur d'apprécier la variété des contextes.

2.3.1 Les normes préhilbertiennes, euclidiennes

Exemple 1 Ici E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$.

..Alors l'application : $x \rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur l'espace préhilbertien $(E, \langle, \rangle)$.

Celle-ci est dite associée au produit scalaire $\langle, \rangle$.

Notamment sur $\mathbb{R}^n$:

Exemple 2 $\forall x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ (norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$).

Puis sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$:

Exemple 3 Pour tout $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2}$ (norme "2" ou de la convergence quadratique sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$).

Et enfin sur $M_n(\mathbb{R})$:

Exemple 4 Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(^tAA)}$ (Norme de Schur).

Ce type de norme, à ancrage fortement géométrique, bénéficie de propriétés particulières et profondes dont voici un échantillon.

Proposition 2 On se place dans l'espace préhilbertien $(E, \langle, \rangle)$ dont on note $\| \cdot \|$ la norme associée.

Soit $(x, y) \in E^2$:

i) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

(Cas d'égalité ssi (x, y) lié).

ii) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (identité du parallélogramme).

iii) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ (Relation de polarisation).

iiii) Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ssi (x, y) sont positivement liés.

2.3.2 Les normes sur $\mathbb{K}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$

Les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^n$:

Exemple 5 (Norme 1)

$$x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Exemple 6 (Norme 2)

$$x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

(On retrouve la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{K}$ est le corps des réels, auquel cas la valeur absolue est inutile.)

Exemple 7 (Norme "infinie")

$$x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Remarque 1 On étend ces définitions à un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n rapporté à une base B avec la substitution :

$$(x_1, \dots, x_n) \leftarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B.$$

Cette remarque prend tout son sens avec $\mathbb{K}_n[X]$ et sa base canonique.

En assimilant une matrice à un uplet, on peut donc aussi définir des normes sur $M_{p,q}(\mathbb{K})$ mais avec cette présentation on peut perdre de vue l'aspect propre aux matrices (contrairement à la définition de la norme de Schur donnée plus haut qui n'est rien d'autre que la norme 2 sur $\mathbb{R}^{n^2}$

2.3.3 Les normes classiques de l'analyse fonctionnelle

Outre la norme de la convergence quadratique déjà mentionnée, on peut normer $E = C^0([a, b], \mathbb{K})^1$ avec les applications suivantes :

Exemple 8 (Norme 1 ou de la convergence en moyenne)

$$f \in E \rightarrow \int_a^b |f| \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_1.$$

Exemple 9 (Norme infinie ou de la convergence uniforme)

$$f \in E \rightarrow \max_{[a,b]} |f| \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_\infty^{[a,b]}$$

Plus généralement et comme démontré en classe :

Exemple 10 Soient X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $B(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

i) $B(X, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

ii) $f \in B(X, \mathbb{K}) \rightarrow \sup_{[a,b]} |f|$ est une norme sur $B(X, \mathbb{K})$, notée $\|\cdot\|_\infty^X$.

Plus anecdotique et donné sous forme d'exercice :

2.3.4 Normes de suites

Exercice (★) 1 Soit $\ell^1(\mathbb{K}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \sum_{n \geq 0} u_n \text{ CVA}\}$.

Montrer alors que : $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{K}) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_1$ est une norme sur $\ell^1(\mathbb{K})$.

Exercice (★) 2 Soit $\ell^\infty(K)$ l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Vérifier que l'application $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{K}) \rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(K)$.

Exercice (★★★) 1 Définir $\ell^2(\mathbb{R})$ ainsi qu'une norme hilbertienne sur cet espace vectoriel en s'inspirant de la norme euclidienne canonique.

2.4 Normes équivalentes

cf votre cours.

J'ajoute néanmoins un point de terminologie (que vous devrez expliquer le cas échéant) permettant de gagner en concision.

Définition 4 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $\mathcal{P}$ une propriété (pouvant être vraie ou fausse donc) dépendant de la norme $\|\cdot\|$.

Nous dirons que $\mathcal{P}$ est une propriété topologique si elle aussi vérifiée lorsque on remplace dans sa définition la norme initiale $\|\cdot\|$ par une norme qui lui est équivalente.

2.5 Convexité

cf votre cours.

3 Suites dans un espace vectoriel normé

On retourne au contexte général en considérant l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

¹On suppose, bien sûr, $a < b$.

3.1 Boules, sphères

Il s'agit pour les premières d'une généralisation de la notion d'intervalle (borné, ouvert ou fermé) dans le cas où le corps des scalaires est le champ réel.

Définition 5 Soient $a \in E$, $r > 0$ alors on note :

- i) $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$ (boule ouverte de centre a et de rayon r).
- ii) $B'(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$ (boule fermée de centre a et de rayon r).
- iii) $S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\} = B'(a, r) \setminus B(a, r)$ (sphère centrée en a et de rayon r).

Par boule (resp. sphère) unité on désigne le cas $a = 0_E$ et $r = 1$.

On notera aussi que la terminologie évoque plutôt la dimension 3.

Il est conseillé de dessiner les boules unités et la sphère unité de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_i)$ où $i \in \{1, 2, \infty\}$. (Pour les sphères, par indice décroissant : le carré de sommets $(1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1)$, le cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon 1 puis le carré de sommets $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$; il est alors facile de dessiner les boules correspondantes).

Une utilisation directe de l'inégalité triangulaire permet de vérifier aisément le fait suivant qui souligne l'analogie avec les intervalles.

Proposition 3 E est ici un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Les boules ouvertes et fermées de $(E, \|\cdot\|)$ sont des parties convexes de E .

Preuve 1 On le prouve néanmoins pour les boules ouvertes en se donnant $B = B(a, r)$ une telle boule ainsi que $(x, y) \in B^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.

On pose $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ et on veut montrer que z appartient lui-aussi à B .

On évalue $R = \|z - a\| = \|(1 - \lambda)(x - a) + \lambda(y - a)\|$ soit par inégalité triangulaire pour notre norme :

$R \leq |(1 - \lambda)| \|x - a\| + |\lambda| \|y - a\| = (1 - \lambda) \|x - a\| + \lambda \|y - a\|$ (puisque $\lambda \in [0, 1]$).

Reste à montrer que le majorant de R obtenu est strictement inférieur à r .

Or $r - (1 - \lambda) \|x - a\| + \lambda \|y - a\| = (1 - \lambda)(r - \|x - a\|) + \lambda(r - \|y - a\|)$. Comme 3 des 4 nombres $(1 - \lambda)$, λ , $r - \|x - a\|$ et $r - \|y - a\|$ est au moins strictement positif, on a bien $R < r$ ■

Exercice (★★) 1 En revanche les sphères ne sont jamais convexes comme le suggère le cas du plan euclidien usuel.

Démontrer ceci dans le cas général.

Indication : Prendre $x \in S(a, r)$ et vérifier que $2a - x$ ("diamétralement opposé à x ") appartient aussi à $S(a, r)$.

Expliquer, en supposant $S(a, r)$ convexe, pourquoi $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(2a - x) \in S(a, r)$ ("un convexe est stable par passage au milieu")?

Conclure.

3.2 Parties bornées d'un espace vectoriel normé

Définition 6 Soit $X \subset E$.

X est une partie bornée de $(E, \|\cdot\|)$ (ou de E en cas de non ambiguïté) si :

$\exists M \geq 0, \forall x \in X, \|x\| \leq M$.

On notera sans déplaisir que cette notion est TOPOLOGIQUE.

On vérifie sans peine (inégalité triangulaire inverse pour ii) implique i)) ce qui suit.

Proposition 4 Soit $X \subset E$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) X est une partie bornée de E .
- ii) X est incluse dans une boule (fermée ou ouverte)

3.3 Convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé

On se donne (x_n) une suite à termes dans E (i.e $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in E$) et $L \in E$.

Définition 7 (x_n) converge vers L dans $(E, \|\cdot\|)$ si la suite de réels positifs $(\|x_n - L\|)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Dans ce cas on écrit $x_n \rightarrow L$ ou $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} L$ si on est amené à changer de norme.

On notera aussi que : $x_n \rightarrow L \iff x_n - L \rightarrow 0_E$.

Géométriquement la suite (x_n) converge vers L signifie que, pour toute boule B centrée en L , les termes de la suite appartiennent APCR à B .

Pratiquement (th des gendarmes oblige) cela revient à trouver une suite de réels positifs (u_n) convergeant vers 0 pour laquelle APCR : $\|x_n - L\| \leq u_n$.

Vous devez absolument vous persuader qu'il s'agit (évident à prouver) d'une notion topologique.

Preuve 2 Supposons que la suite (x_n) , à termes dans E , converge vers L pour la norme N et que N' soit une norme de E pour laquelle il existe $k > 0$ tel que $N' \leq kN$.

Alors pour tout entier naturel n :

$0 \leq N'(x_n - L) \leq kN(x_n - L)$ donc, gendarmes, la suite $(N'(x_n - L))$ converge vers 0 si $n \rightarrow \infty$; ce qui montre que la suite (x_n) converge vers L pour la norme N' .

En inversant les rôles de N et N' , on obtient bien la propriété voulue ■

Remarque 2 Autrement dit si N et N' sont deux normes de E équivalentes on a :

$$N(x_n) \rightarrow 0 \iff N'(x_n) \rightarrow 0.$$

Donc pour démontrer que deux normes sur E ne sont pas équivalentes, il suffit de mettre en évidence une suite de E convergeant vers 0_E pour l'une des normes et n'ayant pas cette propriété pour l'autre.

A titre d'exemple de cette toute dernière remarque :

Exercice (★) 3 Considérons sur $E = C^0([0, 1] = I, \mathbb{R})$ les normes (voir plus haut) $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty^I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$: $f_n(t) = t^n$.

a) Vérifier que $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$.

b) A-t-on $\|f_n\|_\infty^I \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$?

c) Les deux normes en jeu sont-elles équivalentes?

3.4 Propriétés des suites convergentes

Compte tenu de la généralisation envisagée, il n'est pas surprenant d'obtenir les prochains résultats.

Proposition 5 i) Si $L' \in E$ et si $\begin{cases} x_n \rightarrow L \\ x_n \rightarrow L' \end{cases}$ alors $L = L'$ (Unicité de la limite).

ii) Toute suite de $(E, \|\cdot\|)$ convergente est bornée (i.e l'ensemble de ses termes est une partie bornée de E).

iii) Si $(x_n), (y_n)$ sont deux suites à termes dans E convergentes vers L et L' , éléments de E et si $\alpha \in \mathbb{K}$ alors $x_n + \alpha y_n \rightarrow L + \alpha L'$.

iiii) Toute suite extraite d'une suite convergente l'est encore et vers la même limite que la suite mère.

3.5 Convergence d'une suite en dimension finie

Tout va reposer sur le principe fondamental :

Remarque 3 En dimension finie, la notion de convergence et celle de limite ne dépendent pas de la norme puisque celles-ci sont toutes équivalentes.

L'utilisation de la norme 1 permet d'énoncer une caractérisation pratique mais coûteuse de la convergence. On suppose que $\dim(E) = n \geq 1$ et on se donne $b = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E suivant laquelle toutes les composantes seront prises.

Proposition 6 Soient $L = \sum_{i=1}^n L_i e_i \in E$ et $(x_p = \sum_{i=1}^n x_{p,i} e_i)_p$ une suite à termes dans E .

$$x_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} L \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{p,i} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} L_i.$$

En particulier (convergence dans $\mathbb{K}^n$): $(x_{p,1}, \dots, x_{p,n}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} (L_1, \dots, L_n) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{p,i} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} L_i.$

Cette caractérisation via les suites de composantes vaut aussi pour les suites de matrices; elle porte alors sur les suites des coefficients des matrices. A titre d'application (simple utilisation des opérations usuelles sur les limites des suites à termes dans $\mathbb{K}$:

Proposition 7 (Compatibilité limite et produit matriciel)

Soient $(A_m)_m$ une suite à termes dans $M_{p,q}(\mathbb{K})$ convergeant vers $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(B_m)_m$ une suite à termes dans $M_{q,r}(\mathbb{K})$ convergeant vers $B \in M_{q,r}(\mathbb{K})$, où p, q et r sont des entiers naturels non nuls.

$$\text{Alors } A_m B_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} AB$$

Pour finir un exercice regroupant des résultats élémentaires sur les suites de matrices.

Exercice (★★) 2 On se donne $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1) On suppose que la suite $(A^p)_p$ converge vers $L \in M_n(\mathbb{K})$.

a) En considérant la suite extraite (A^{2p}) et en utilisant la proposition précédente ($A^{2p} = A^p A^p$), prouver que $L^2 = L$ donc que L est une matrice de projecteur.

b) Montrer en outre que A et L commutent.

c) Des relations $AL = LA = L$ (à justifier), déduire : i) Si $1 \notin \text{Sp}(A)$ alors $L = 0_n$.

ii) Prouver que L est la matrice du projecteur sur $\text{Im}(A - I_n)$ et parallèlement à $\text{Ker}(A - I_n)$.

2) On se donne, dans cette question uniquement, N une norme sur $M_n(\mathbb{K})$ sous-multiplicative i.e telle que $N(BC) \leq N(B)N(C)$ pour tout (B, C) de $(M_n(\mathbb{K}))^2$ (il existe de telles normes cf partie I Centrale PSI 2025 étudiée en TD).

On suppose que $N(A) < 1$. Etablir que la suite $(A^p)_p$ converge vers 0_n .

3) On suppose A diagonalisable et on se donne $P \in \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$.

a) Vérifier l'équivalence suivante :

$(A^p)_p$ converge $\iff (D^p)_p$ converge (utiliser la proposition précédente en procédant par double implication).

On note $\Lambda = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} \cup \{1\}$.

b) Prouver alors que : $(A^p)_p$ converge $\iff \text{Sp}(A) \subset \Lambda$.

c) Dans le cas de convergence, identifier la limite de la suite $(A^p)_p$.