Corrigé du TD 10 : Normes et Convexité

Exercice ($\star$) 1 *(Convexité)*
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
a) Soit F un sev de E. F est-il un convexe de E?
b) On se donne un autre $\mathbb{R}$ espace vectoriel G et $f \in L(F, G)$.
Pour $a \in G$, $f^{-1}(\{a\}) = \{x \in E, f(x) = a\}$ est-elle une partie convexe de E?

Solution :
a) Oui. Prenons x, y dans F alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$: $\lambda.x + \mu.y \in F$.
Donc cette assertion est valide pour $\lambda \in [0,1]$ et $\mu = 1 - \lambda$ donc $\boxed{F \text{ est bien convexe}}$ ■
b) Soient x, y dans $f^{-1}(\{a\})$ et $\lambda \in [0,1]$ alors, par linéarité de f :
$f(\lambda.x + (1-\lambda).y) = \lambda.f(x) + (1-\lambda).f(y) = \lambda.a + (1-\lambda).a = a$.
Ainsi $\lambda.x + (1-\lambda).y \in f^{-1}(\{a\})$.
Conclusion $\boxed{f^{-1}(\{a\}) \text{ est une partie convexe de } E}$ ■

Exercice ($\star\star$) 1 *(Convexité)*
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq f(x)\}$.
Prouver que X est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Solution :
Soient $a = (x, y)$ et $b = (u, v)$ dans X ainsi que $\lambda \in [0,1]$.
Posons $c = \lambda.a + (1-\lambda).b = (\lambda x + (1-\lambda)u, \lambda y + (1-\lambda)v)$ et montrons que $c \in X$.
Ainsi, par convexité de f, $f(\lambda x + (1-\lambda)u) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(u)$ puis, l'appartenance de a et b à X implique $f(x) \leq y$ et $f(u) \leq v$ donc, en combinant, $f(\lambda x + (1-\lambda)u) \leq \lambda y + (1-\lambda)v$.
Ceci montre que $c \in X$ donc que $\boxed{X \text{ est une partie convexe de } \mathbb{R}^2}$ ■

Exercice ($\star\star$) 2 *(Convexité)*
Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et X une partie convexe de E.
Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$\forall (x_1, ..., x_n) \in X^n$, $\forall (t_1, ..., t_n) \in [0,1]^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in X$.

Solution :
On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$ c'est tautologique.
Supposons la propriété en vue, vérifiée à l'ordre $n-1$, ce pour $n \geq 2$.
Soient $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ et $(t_1, ..., t_n) \in [0,1]^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.
Etablissons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in X$. On posera $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} t_i \in [0,1]$ et ainsi $1 - S = t_n$.
Si $S = 1$ (soit $t_n = 0$) alors l'hypothèse de récurrence donne le résultat voulu□
Si $S = 0$, on est ramené au cas $n = 1$ donc validé aussi.
Sinon $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = S(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{S} x_i) + (1-S)x_n$ et on observe, par (HR) (puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{S} = \frac{S}{S} = 1$ et que chaque $\dfrac{t_i}{S} \in [0,1]$, ce par définition de S et aussi parce que $(x_1, ..., x_{n-1}) \in X^{n-1}$), l'appartenance à X de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{S} x_i) = y$. Puis la convexité de X appliquée au couple $(y, t_n) \in X^2$ et à $\lambda = S$ nous obtenons bien

que $S(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{S} x_i) + (1-S)x_n \in X$.
La récurrence se poursuit$\blacksquare$

Exercice ($\star\star\star$) 1 *(Mines)*
Soient $E = C^1([a,b], \mathbb{C})$ *et* $N : f \in E \to |f(a)| + \int_a^b |f'|$.
Montrer que N *est une norme sur* E *et la comparer à* $\|.\|_\infty^{[a,b]}$.

Solution :
N est parfaitement définie puisque on peut intégrer toute fonction continue sur un segment.
La positivité de l'intégrale confirme celle de N.
Les linéarités de la dérivation et de l'intégrale donnent l'homogénéité de N.
Soit $f \in E$ telle que $N(f) = 0$ alors $f(a) = 0$ et $|f'| = 0$ sur $[a,b]$ (intégrale nulle d'une fonction continue positive entraîne la nullité de la fonction). Donc f est constante sur $[a,b]$ et nulle en a. f est la fonction nulle (séparation).
L'inégalité triangulaire provient de cette même propriété pour $|.|$ et de la croissance de l'intégrale.
Bilan : $\boxed{N \text{ est une norme sur } E}$$\square$
Observons ensuite que $N(f) \geq |f(a)| + \int_a^x |f'|$, ce pour tout $f \in E$ et tout $x \in [a,b]$.
Donc dans ce cadre, inégalité triangulaire(pour l'intégrale) oblige et par théorème fondamental du calcul intégral :
$N(f) \geq |f(a)| + |\int_a^x f'| = |f(a)| + |f(x) - f(a)| \geq |f(x)|$ (ce dernier point par inégalité triangulaire pour le module).
Finalement $\boxed{\forall x \in [a,b], N(f) \geq |f(x)|}$ et, par les bornes atteintes appliquées à la fonction f qui est bien continue sur le segment $[a,b]$ et à valeurs réelles, il vient que $\boxed{N(f) \geq \max_{x \in [a,b]}(|f(x)|) = \|f\|_\infty^{[a,b]}}$. Cette inégalité constitue un premier pas dans la comparaison entre les normes N et $\|.\|_\infty^{[a,b]}$$\square$
Ensuite posons $f_n : t \in [a,b] \to \frac{e^{int}}{n}$ qui est, pour tout $n \geq 1$, un élément de E.
Pour tout $n \geq 1$: $N(f_n) = \frac{1}{n} + b - a$ et $\|f_n\|_\infty^{[a,b]} = \frac{1}{n}$.
On voit donc que la suite $(N(f_n))$ ne converge pas (il est tacite que $b > a$) vers 0 alors que la suite $(\|f_n\|_\infty^{[a,b]})$ oui. Il en résulte que $\boxed{\text{ces deux normes ne sont pas équivalentes}}$$\blacksquare$

Exercice ($\star\star\star$) 2 *(Centrale)*
Soient a *réel et* $E = \mathbb{R}[X]$ *et* $N_a : P \in E \to |P(a)| + \max_{[-1,1]} |P'|$.
i) Montrer que N_a *est une norme sur* E.
ii) Etablir que si $(a,b) \in [-1,1]^2$, N_a *et* N_b *sont équivalentes.*
iii) Que dire si $a \in [-1,1]$ *et* $|b| > 1$ *?*

Solution :
On pose pour simplifier $M = \|.\|_\infty^{[-1,1]}$, il s'agit, on le sait, d'une norme sur E.
i) La définition de N vient de la continuité des fonctions polynômes et du théorème de Weierstrass sur le segment $[-1,1]$.
Positivité, homogénéité et inégalité triangulaire découlent de la relation $N_a(P) = |P(a)| + M(P)$, ce pour tout $P \in E$ et tout réel a et des propriétés analogues pour $|.|$ et M.
Occupons nous de la séparation : soit $P \in E$ tel que $N_a(P) = 0$ alors a est racine de P et P est constant donc $P = 0$.
$\boxed{N_a \text{ est une norme sur } E \text{ pour tout reél } a}$$\blacksquare$
ii) L'inégalité des accroissements finis, appliquée à $P \in E$ sur $[-1,1]$, donne $|P(a) - P(b)| \leq M(P)|a-b|$, ce pour tout $(a,b) \in [-1,1]^2$.
Par inégalité triangulaire et de ceci on déduit que :
$N_a(P) = |P(a)| + M(P) \leq |P(b)| + |P(a) - P(b)| + M(P) \leq |P(b)| + (1 + |a-b|)M(P) \leq (1 + |a-b|)N_b(P)$

et similairement $N_b(P) \leq (1+|b-a|)N_a(P)$.

$\boxed{\text{Ainsi les normes } N_a \text{ et } N_b \text{ sont équivalentes si } (a,b) \in [-1,1]^2}$ ■

iii) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \dfrac{X^n}{n^2}$. De façon évidente $M(P_n) = \dfrac{1}{n}$ et $P_n(a) \to 0$ si $n \to \infty$ donc la suite $(N_a(P_n))_n$ converge vers 0 alors que $N_b(P_n) \geq \dfrac{|b|^n}{n^2} \to +\infty$ par croissance comparée ($|b| > 1$).

Il en résulte que dans ce contexte $\boxed{N_a \text{ et } N_b \text{ ne sont pas équivalentes}}$ ■

Exercice ($\star\star\star\star$) **1** *n est un entier naturel non nul et $a_k, b_k, 1 \leq k \leq n$ désignent des réels.*

1) On se donne deux réels strictement positifs p et q tels que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a) Etablir que pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

b) En déduire , en posant ,lorsque c'est possible, $x = \dfrac{|a_k|}{S}, y = \dfrac{|b_k|}{S'}$, où $S = (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p}, S' = (\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{1/q}$, dans l'inégalité précédente que (inégalité de Hölder) :

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{1/q} (*)$$

c) En uilisant deux fois $(*)$, établir que :

$$(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p))^{1/p} \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^n |b_k|^p)^{1/p} (**)$$

2) Soit $\alpha > 0$, pour $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $N_\alpha(x) = (\sum_{k=1}^n |a_k|^\alpha)^{1/\alpha}$.

a) Expliquer pourquoi dès que $\alpha \geq 1$, N_α définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b) Que penser du cas $\alpha < 1$?

Solution :

1)a) Bloquons y et étudions $f : x \in \mathbb{R}_+ \to \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} - xy$ qui est dérivable avec $f'(x) = x^{p-1} - y$.

La relation entre p, q implique que $p > 1$ et f présente un minimum en $y^{1/p-1}$.

Comme $f(y^{1/p-1}) = \dfrac{1}{p} y^{\frac{p}{p-1}} + \dfrac{1}{q} y^q - y^{\frac{p}{p-1}} = 0$ puisque $q = \dfrac{p}{p-1}$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

De ce constat, il résulte que $\boxed{f \geq 0}$; ce qui est l'inégalité demandée.

Elle semble due à $\boxed{\text{Young, phycisien (fente de Young?) anglais}}$ □

Une solution plus rapide mais plus savante consiste à comparer les logarithmes de l'inégalité à prouver et à utiliser la concavité sur $\mathbb{R}_+^*$de la fonction ln■

b) Si $S = 0$ ou $S' = 0$ alors $(*)$ se réduit à $0 \leq 0$ donc s'en trouve vérifiée□

Sinon, par inégalité triangulaire et applications répétées du a) :

$$\left|\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{S} \frac{b_k}{S'}\right| \leq \sum_{k=1}^n \left|\frac{a_k}{S} \frac{b_k}{S'}\right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{p} \left|\frac{a_k}{S}\right|^p + \sum_{k=1}^n \frac{1}{q} \left|\frac{b_k}{S'}\right|^q.$$

Donc $\left|\sum_{k=1}^n \dfrac{a_k}{S} \dfrac{b_k}{S'}\right| \leq \dfrac{1}{pS^p} \sum_{k=1}^n |a_k|^p + \dfrac{1}{qS'^q} \sum_{k=1}^n |b_k|^q = \dfrac{1}{pS^p} S^p + \dfrac{1}{qS'^q} S'^q = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Soit enfin $\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leq SS'$, ce qui est $(*)$.

Cette vilaine inégalité, connue sous le nom d'inégalité de Hölder, est donc une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($p = q = 1/2$)■

c) Partons de $\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p = \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |a_k| + \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |b_k|$ et, à l'aide de $(*)$

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |a_k| + \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{q(p-1)}\right)^{1/q} \left((\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^n |b_k|^p)^{1/p}\right).$$

On remarque alors que $q(p-1) = p$ et, en posant $T = \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p$, il vient :

$T \leq T^{1/q} \times \left((\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p)^{1/p} \right)$.
Si $T = 0$, tous les a_k et b_k sont nuls et ce que l'on doit démontrer est une évidence.
Si $T > 0$: toujours avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on obtient $T^{1/p} \leq \left((\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p)^{1/p} \right)$ et,
puisque $T \geq \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p$, l'inégalité $(**)$ (dite de Minkowski) en résulte$\blacksquare$

2)a) Si $\alpha = 1$, c'est une norme usuelle.
Si $\alpha > 1$ alors en posant $p = \alpha$ et $q = \frac{\alpha}{\alpha - 1} > 0$, on a bien $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
DONC $(**)$ fournit l'inégalité triangulaire pour N_α, ce qui est le point dur; la vérification des autres propriétés étant facile$\blacksquare$

b) On peut penser que non. Supposons malgré tout que N_α soit toujours une norme sur $\mathbb{R}^n$ alors sa boule unité fermée, notée $B_\alpha$serait une partie convexe de cet espace.
Nous allons montrer qu'il n'en est rien en prenant les deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à savoir e_1 et e_2 qui sont bien sûr éléments de B_α. Si B_α était convexe, $x = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$ devrait appartenir à cette même boule, autrement dit on aurait $N_\alpha(x) \leq 1$.
Or $N_\alpha(x) = 2^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} > 1$ puisque $2 > 1$ et l'exposant $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ est strictement positif.
Ainsi notre boule unité fermée n'étant pas convexe : $\boxed{N_\alpha \text{ n'est pas une norme si } \alpha < 1}$$\blacksquare$