

Corrigé du DS 2 Mines + (4 heures).

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Tout manquement à ces consignes sera sanctionné.

PROBLEME 1

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans K et pour une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
- On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$ avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
- Pour $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on notera son conjugué $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, sa partie réelle $\text{Re}(X) = \frac{X + \bar{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\text{Im}(X) = \frac{X - \bar{X}}{2i}$.
- Si $M \in M_n(\mathbf{R})$, l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (respectivement $\mathbf{C}^n$) canoniquement associé à M est:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \quad \left(\text{respectivement} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \longrightarrow & \mathbf{C}^n \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \right).$$

1 Matrices semi-simples

Définition 1 Une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est dite *semi-simple* si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$.

Définition 2 Une matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ est dite *presque diagonale* s'il existe:

- deux entiers naturels p et q ;
- q réels $a_1, a_2, \dots, a_q$;
- q réels non nuls $b_1, b_2, \dots, b_q$;
- une matrice D diagonale de $M_p(\mathbf{R})$ tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice bloc suivante:

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2, b_2) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

où: $\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M . De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

Soit A la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle semi-simple?

Solution:

Son polynôme caractéristique est : $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$.

La matrice étant non scalaire et à spectre réduit à un singleton, elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

A n'est pas semi-simple ■

Soit B la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $M_2(\mathbf{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que:

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication: on pourra, pour un vecteur propre V de B , introduire les vecteurs $W_1 = \operatorname{Re}(V)$ et $W_2 = \operatorname{Im}(V)$.

Solution:

Le polynôme caractéristique de B , $X^2 - 4X + 13$, étant scindé et à racines simples sur $\mathbb{C}$, B est bien semi-simple.

Le spectre(complexe) de B est $\{2 \pm 3i\}$; considérons donc $V = W_1 + iW_2$ (avec les notations suggérées par l'énoncé) une colonne propre de B associée à $2 + 3i$. La réalité des coefficients de B fait que $B(W_1 + iW_2) = (2 + 3i)(W_1 + iW_2)$ implique $BW_1 = 2W_1 - 3W_2$ et $BW_2 = 3W_1 + 2W_2$.

Par la suite nous prouvons que (W_1, W_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Pour cela on observe que $(V, \bar{V})$ est une base de $\mathbb{C}^2$ (base de colonnes propres de B , diagonalisable sur $\mathbb{C}$), ce qui interdit toute colinéarité entre W_1 et W_2 . Dans cette base de $\mathbb{R}^2$ l'endomorphisme canoniquement associé à B est représenté par $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. La similitude voulue en découle ■

Soit M une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.

On suppose dans la question 3) seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\bar{\mu} = a - ib$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}^*$.

3. Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $M_2(\mathbf{R})$ à la matrice:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Solution:

C'est la même démarche qu'en 2. puisque même contexte ■

4. Démontrer que M est semi-simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite:

- i) M est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$;
- ii) χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

Solution:

Si i) ou ii) réalisé, M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (i)) ou sur $\mathbb{C}$ (cas ii), χ_M étant scindé et à racines simples sur $\mathbb{C}$ comme dans 3.) donc M est semi-simple.

Inversement si M est semi-simple et que M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou bien le spectre (complexe) de M est constitué de 2 racines conjuguées non réelles ou bien ce spectre ne contient qu'un élément qui est nécessairement un réel. Le caractère diagonalisable sur $\mathbb{C}$ entraînerait que M soit scalaire donc dz sur $\mathbb{R}$ ce qui est contadictoire. Donc i) ou ii) est bien réalisé■

5. Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.

Solution:

La $\mathbb{C}$ diagonalisabilité étant invariant de similitude, il suffit de montrer qu'une matrice presque diagonale est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Posons $N = \text{diag}(D, M_1, \dots, M_q)$ avec des notations simplifiées mais similaires à la définition de presque diagonale.

Par 3. chaque M_i étant semi-simple, il existe $P_i \in GL_2(\mathbb{C})$ et Δ_i diagonale (à coefficients complexes) telles que $M_i = P_i \Delta_i P_i^{-1}$, ce pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$.

En posant $P = \text{diag}(I_p, P^1, \dots, P^q)$ (clairement inversible car diagonale par blocs tous inversibles), il vient $N = P \text{diag}(D, \Delta_1, \dots, \Delta_q) P^{-1}$. Ce qui montre le caractère semi-simple de N ■

6. Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbf{C}[X]$, en précisant dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $M_n(\mathbf{R})$ à une matrice presque diagonale.

Solution:

On note $t_1, \dots, t_p$ une liste des racines réelles et $r_1, \bar{r}_1, \dots, r_q, \bar{r}_q$ une liste des racines complexes de χ_N

(donc $p + 2q = n$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$). Dès lors : $\chi_N = \prod_{i=1}^p (X - t_i) \prod_{i=1}^q (X - r_i)(X - \bar{r}_i)$ □

Puisque notre matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, on peut associer à chaque t_i un vecteur propre $X_i \in \mathbb{R}^n$ de sorte que $(X_1, \dots, X_s)$ soit libre (dans $\mathbb{C}^n$); on complète cette famille avec $(V_1, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_q)$ pour obtenir une base de $\mathbb{C}^n$ tout en exigeant que V_i (resp. $\bar{V}_i$ vecteur propre de N associé à r_i (resp. $\bar{r}_i$).

Pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, on pose $W_{1,i} = \text{Re}(V_i)$ et $W_{2,i} = \text{Im}(V_i)$. Comme vu en 2) la famille $(W_{1,i}, W_{2,i})$ est libre et il existe des réels a_i et $b_i \neq 0$ tels que $NW_{1,i} = a_i W_{1,i} - b_i W_{2,i}$ et $NW_{2,i} = b_i W_{1,i} + a_i W_{2,i}$. Finalement par construction dans la base de $\mathbb{R}^n : (X_1, \dots, X_q, W_{1,1}, W_{2,1}, \dots, W_{1,q}, W_{2,q})$, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à N est

$$M = \begin{pmatrix} \text{Diag}(t_1, \dots, t_p) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2, b_2) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

et N s'en trouve semblable dans $M_n(\mathbb{R})$ à une matrice presque diagonale■

2 Une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E .

On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . Soit F un sous-espace vectoriel de E , différent de $\{0_E\}$ et de E .

7. Démontrer qu'il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe.

Solution:

Puisque $F \neq E$ et que $(v_1, \dots, v_n)$ engendre E , un tel k existe bien $\square$.

Si $x \in F \cap \text{Vect}(v_k)$ alors il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que $x = tv_k$. Si $t \neq 0$ alors $\frac{1}{t}x = v_k$ appartient à F . C'est absurde donc $t = 0$ et $x = 0_E$. En conclusion F et $\text{Vect}(v_k)$ sont bien en somme directe $\blacksquare$

On note alors:

$$\mathcal{A} = \{H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subseteq H \text{ et } F \cap H = \{0_E\}\}$$

et:

$$\mathcal{L} = \{p \in \mathbb{N}^* \mid \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H)\}.$$

8. Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera r .

Solution:

Il s'agit d'une partie de $\mathbb{N}$ majorée (par la dimension de E) et non vide; en effet 1 en est un élément puisque $\text{Vect}(v_k)$ est stable par u (car dirigé par un vp de u) et qu'il est en somme directe avec F d'après la question précédente $\blacksquare$

9. Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E , stable par u .

Solution:

Considérons donc H un élément de $\mathcal{A}$ de dimension r (donc de dimension maximale) et posons $F' = F \oplus H$.

Premier cas : $F' = E$, H est un supplémentaire de F dans E , stable par u .

Deuxième cas : $F' \neq E$ et donc en appliquant à F' la technique de la question 7, il existe $v_j \notin F'$ tel que $H' = H \oplus \text{Vect}(v_j) \in \mathcal{L}$ (car en somme directe avec F et stable par u (en tant que somme de tels sev). La maximalité de r est contredite et ce second cas ne se produit jamais $\blacksquare$

10. On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E , stable par u . Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$. *Indication: on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n - 1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u .*

Solution:

Notons F la somme directe des sous-espaces propres de u . Travaillant avec des complexes $F \neq \{0_E\}$. Supposons $F \neq E$: F étant stable par u (somme de tels sev), il possède un supplémentaire $G \neq \{0_E\}$, stable par u . L'endomorphisme de G induit par u admet, comme endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie ≥ 1 , au moins un vecteur propre. Ce dernier est en fait aussi un vecteur propre de u appartenant à G alors que tous les vecteurs propres de u sont dans F . Contradiction donc $F = E$ et u est bien diagonalisable.

Une CNS de diagonalisabilité de u est que tout sous-espace stable par u possède un supplémentaire (dans E) lui-même stable par u .

(Tenir aussi compte des sous-espaces triviaux écartés par l'énoncé) $\blacksquare$

.....
PROBLEME 2 Dans le problème, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

La matrice transposée d'une matrice $M \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ est notée tM .

$\mathbb{C}^n$ est identifié à l'espace $M_{n,1}(\mathbb{C})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sont notés $x_1, \dots, x_n$.

On définit $\| \cdot \|_1$ définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Pour tous $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$, la matrice ${}^txy \in M_1(\mathbb{C})$ est identifiée au nombre complexe $\sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par un vecteur $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ est noté $\mathbb{C}v$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont des réels positifs (resp. strictement positifs). Cette propriété est notée $M \geq 0$ (resp. $M > 0$).

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, on notera $A \geq B$ (resp. $A > B$) la propriété $A - B \geq 0$ (resp. $A - B > 0$). Ainsi, pour x et y dans $\mathbb{R}^n$,

$$x \geq y \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i \geq y_i.$$

Lorsque $m = n$, on utilisera la notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ (resp $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$).

La matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

sera notée $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On note $I_n = (1, \dots, 1)$ la matrice identité d'ordre n .

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1=1} \|Mx\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}. \quad (1)$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sera en général identifiée à l'endomorphisme φ_M de $\mathbb{C}^n$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$: pour $x \in \mathbb{C}^n$, $\varphi_M(x) = Mx$. On appelle spectre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on note $Sp(M)$, l'ensemble des valeurs propres de M . Le rayon spectral de M , noté $\rho(M)$, est défini comme le maximum des modules des valeurs propres de M :

$$\rho(M) = \max\{|\lambda|; \lambda \in Sp(M)\}.$$

Première partie

1. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout nombre réel $C > 0$, montrer l'équivalence

$$\|M\| \leq C \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1.$$

Solution :

Supposons $\|M\| \leq C$ et donnons nous $x \in \mathbb{C}^n$.

i) $x = 0_{1,n}$ alors $\|Mx\|_1 = 0 \leq C\|x\|_1 = 0$.

ii) Sinon $\frac{1}{\|x\|_1}x$ a une norme 1 donc $\|M(\frac{1}{\|x\|_1}x)\|_1 \leq \|M\| \leq C$ puis par linéarité :

$$\|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1.$$

L'implication réciproque est évidente puisqu'on spécialise l'inégalité dont on part aux seuls vecteurs de norme-1 égale à 1 ■

2. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Solution :

Pour $x \in \mathbb{C}^n$, $\|ABx\|_1 = \|A(Bx)\|_1 \leq \|A\| \|Bx\|_1$, en utilisant la question précédente, où $M \leftarrow A$ et $C = \|A\|$.

De la même façon $\|Bx\|_1 \leq \|B\| \|x\|_1$ donc $\|ABx\|_1 \leq \|A\| \|B\| \|x\|_1$, ce pour tout $x \in \mathbb{C}^n$.

Ce qui nous assure avec la même référence (ici $C = \|A\| \|B\|$) de l'inégalité souhaitée ■

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j . Montrer que

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$$

.

Solution :

Notons provisoirement $m = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$.

Considérons $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\|_1 = 1$ alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$|(Ax)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j|, \text{ ce par inégalité triangulaire donc (Fubini)}$$

$$\sum_{i=1}^n |(Ax)_i| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \leq m \|x\|_1.$$

Ainsi (par 1)) $\boxed{\|A\| \leq m}$.

Montrons maintenant que l'on peut obtenir l'égalité dans cette inégalité.

Malgré la débauche de notations livrées par l'énoncé, il nous incombe de proposer pour base canonique de $\mathbb{C}^n : (e_1, \dots, e_n)$.

Soit un entier j pour lequel $m = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$ alors $\|Ae_j\|_1 = m$ et bien sûr $\|e_j\|_1 = 1$. Egalité atteinte et

par conséquent on a bien $\boxed{\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)}$ ■

4. On dit qu'une suite $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{i,j})^{(k)} = b_{i,j}.$$

Montrer que la suite $(A^{(k)})$ converge vers B si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{(k)} - B\| = 0$.

Solution :

Dire que la suite $(A^{(k)})$ converge vers B équivaut à satisfaire $|b_{ij} - a_{ij}^{(k)}| \rightarrow 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. De plus dans le même contexte et pour tout entier naturel k (cf question précédente sous-employée) :

$$|b_{ij} - a_{ij}^{(k)}| \leq \|B - A^{(k)}\| \leq \sum_{p,q} |b_{pq} - a_{pq}^{(k)}|.$$

Ainsi par double implication immédiate on voit que $(A^{(k)})$ converge vers B ssi la suite $(\|B - A^{(k)}\|)$ converge vers 0 et on prend conscience de tout le bienfait d'une telle caractérisation ■

5. On considère dans cette question une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On suppose que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| < 1.$$

Pour tout réel $b > 0$, on pose $P_b = (1, b, b^2, \dots, b^{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Calculer $P_b^{-1}AP_b$. Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre b vers 0 ?

(b) Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\|P_b^{-1}AP_b\| < 1.$$

(c) En déduire que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Solution :

a) En notant $B = (b_{ij})$ la matrice $P_b^{-1}AP_b$ qui est bien sûr triangulaire supérieure, il vient $b_{ij} = b^{1-i}a_{ij}b^{j-1} = b^{j-i}a_{ij}$, ce pour $1 \leq i \leq j \leq n$.

Il s'ensuit (avec la caractérisation du 4)) que $P_b^{-1}AP_b \rightarrow \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) = \boxed{D}$ si $b \rightarrow 0$ □

b) Il est assez évident (cf expression obtenue en 3.) que $\|\cdot\|$ est une norme donc satisfait l'inégalité triangulaire en conséquence de quoi :

$$\|P_b^{-1}AP_b\| \leq \|D\| + \|P_b^{-1}AP_b - D\|.$$

Comme (cf 3. toujours) $\|D\| < 1$ et que $\|P_b^{-1}AP_b - D\| \rightarrow 0$ si $b \rightarrow 0$ (par a)), on peut trouver $b > 0$ tel que $\|P_b^{-1}AP_b\| < 1$ □

c) Pour tout k et grâce à 2., nous avons :

$$0 \leq \|A^k\| \leq \|P_b\| \|P_b^{-1}A^kP_b\| \|P_b^{-1}\| \leq \|P_b\| \|P_b^{-1}AP_b\|^k \|P_b^{-1}\|.$$

Le b) et le théorème des gendarmes permettent aisément de conclure à la convergence vers 0 de la suite $(\|A^k\|)$ donc (4.) de la suite (A^k) vers la matrice nulle ■

Deuxième partie

6. Déterminer le rayon spectral des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution :

On a très facilement et dans l'ordre $1, 0, 1, \sqrt{2}, 4$ ■

7. Dire, en justifiant brièvement la réponse, si les assertions suivantes sont exactes quels que soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mu \in \mathbb{C}$.

i) $\rho(\mu A) = |\mu| \rho(A)$

ii) $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.

iii) $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$.

iv) Pour $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$.

v) $\rho({}^tA) = \rho(A)$.

Solution :

i) Oui car $Sp(\mu A) = \mu Sp(A)$.

ii) Non, prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = {}^tA$ alors $\rho(A) = \rho(B) = 0$ et $\rho(A + B = I_2) = 1$.

iii) Non, prendre les mêmes matrices qu'en ii).

iv) Oui par invariance de similitude.

v) Oui puisque deux matrices transposées l'une de l'autre ont même spectre ■

8. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Solution :

Soient $t \in Sp(A)$ tel que $|t| = \rho(A)$ et x un vecteur propre de A associé à t que l'on peut supposer unitaire (quitte à le " diviser " par sa norme) i.e $\|x\|_1 = 1$.

Comme $Ax = tx$ on dispose aussi (en passant aux normes) de $\|Ax\|_1 = \rho$. De part sa définition on a aussi $\|A\| \geq \|Ax\|_1$ d'où $\rho(A) \leq \|A\|$ ■

Dans les questions 9 à 11, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

9. Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Solution :

Dans ce cas A est semblable à une matrice T triangulaire supérieure satisfaisant aux hypothèses de la question 5.; en particulier la suite (T^k) converge vers 0_n .

Comme il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$, il vient (pour tout entier naturel k et grâce à 2.) :

$$0 \leq \|A^k\| \leq \|P\| \|T^k\| \|P^{-1}\|.$$

Ce qui montre bien la convergence de la suite (A^k) vers 0_n ■

10. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\| \geq \rho(A)^k$.

(b) On définit la partie de $\mathbb{R}_+$

$$E_A = \{\alpha > 0 \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{A}{\alpha}\right)^k = 0\}.$$

Montrer que $E_A =]\rho(A), +\infty[$.

Solution :

a) On a clairement $\rho(A^k) \geq (\rho(A))^k$ donc avec 8. $\boxed{\|A^k\| \geq \rho(A)^k}$.

b) Si $\alpha > \rho(A)$ alors $\rho(\frac{1}{\alpha}A) < 1$, par conséquent (avec 9.) $(\frac{1}{\alpha}A)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0_n$.

Autrement dit $]\rho(A), +\infty[\subset E_A$.

Si maintenant $(\frac{1}{\alpha}A)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0_n$, par a) et gendarmes la suite géométrique $((\frac{\rho(A)}{\alpha})^k)$ converge vers 0 donc sa raison, positive ici, est strictement inférieure à 1. Soit $\alpha > \rho(A)$ donc l'inclusion inverse est validée et partant l'égalité voulue ■

11. Montrer la formule

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

Solution :

La question 10.a) prouve que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A)$.

Donnons nous maintenant $\epsilon > 0$, par 10.b) nous savons que APCR : $\frac{\|A^k\|}{(\epsilon + \rho(A))^k} \leq 1$.

Donc APCR : $\|A^k\|^{1/k} \leq \epsilon + \rho(A)$

De cet encadrement APCR de $\|A^k\|^{1/k}$, on déduit (définition epsilonesque de la limite, que :

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)} \quad \blacksquare$$

12. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{i,j}$, on pose $A_+ = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $b_{i,j} = |a_{i,j}|$. Montrer l'inégalité

$$\rho(A) \leq \rho(A_+).$$

Solution :

On note par B la matrice A_+ .

On a sans problème et par récurrence que $|A_{ij}^k| \leq B_{ij}^k$. Dès lors avec 3., 11. et conservation des inégalités à la limite, nous obtenons $\boxed{\rho(A) \leq \rho(B)} \quad \blacksquare$

Troisième partie

Dans toute cette partie, A est une matrice **strictement positive** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On se propose de démontrer les propriétés suivantes.

(i) $\rho(A) > 0$, $\rho(A)$ est une valeur propre de A et toute autre valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A vérifie $|\lambda| < \rho(A)$.

(ii) $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et $\ker(A - \rho(A)I_n)$ est engendré par un vecteur v_0 dont toutes les composantes sont strictement positives.

(iii) Si v est un vecteur propre de A dont toutes les composantes sont positives, alors $v \in \ker(A - \rho(A)I_n)$.

(iv) Pour tout vecteur positif non nul x , il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k x}{\rho(A)^k} = cv_0$.

13. Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que si

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|,$$

alors le vecteur $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}$.

Solution :

14. Soient $x, y \in \mathbb{C}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\lambda \neq \mu$, alors on a l'implication suivante :
 $(Ax = \lambda x \text{ et } {}^tAy = \mu y) \Rightarrow {}^txy = 0$.

Solution :

15. On suppose qu'il existe un réel positif μ et un vecteur positif non nul w tels que $Aw \geq \mu w$.

- (a) Montrer que pour tout entier naturel k , $A^k w \geq \mu^k w$. En déduire que $\rho(A) \geq \mu$.
 (b) Montrer que si $Aw > \mu w$, alors $\rho(A) > \mu$.
 (c) On suppose à présent que dans le système d'inégalités $Aw \geq \mu w$, la k -ième inégalité est stricte, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j} w_j > \mu w_k.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, en posant $w'_j = w_j$ si $j \neq k$ et $w'_k = w_k + \varepsilon$, on a $Aw' > \mu w'$.
 En déduire que $\rho(A) > \mu$.

Solution :

16. Soit λ une valeur propre de A de module $\rho(A)$ et soit $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé à λ . On définit le vecteur positif non nul v_0 par $(v_0)_i = |x_i|$ pour $1 \leq i \leq n$.

- (a) Montrer que $Av_0 \geq \rho(A)v_0$, puis que

$$Av_0 = \rho(A)v_0.$$

- (b) En déduire que $\rho(A) > 0$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (v_0)_i > 0.$$

- (c) Montrer que x est colinéaire à v_0 . En déduire que $\lambda = \rho(A)$.

La propriété (i) est démontrée. Solution :

17. En appliquant les résultats précédents à la matrice tA , on obtient l'existence de $w_0 \in \mathbb{R}^n$, dont toutes les composantes sont strictement positives, tel que ${}^tAw_0 = \rho(A)w_0$. On pose

$$F = \{x \in \mathbb{C}^n \mid {}^txw_0 = 0\}.$$

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par φ_A , et que

$$\mathbb{C}^n = F \oplus \mathbb{C}v_0.$$

- (b) Montrer que si v est un vecteur propre de A associé à une valeur propre $\mu \neq \rho(A)$, alors $v \in F$.
 En déduire la propriété (iii).

Solution :

18. (a) On note ψ l'endomorphisme de F défini comme la restriction de φ_A à F . Montrer que toutes les valeurs propres de ψ sont de module strictement inférieur à $\rho(A)$. En déduire que $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et que

$$\ker(A - \rho(A)I_n) = \mathbb{C}v_0.$$

La propriété (ii) est démontrée.

- (b) Montrer que si $x \in F$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k x}{\rho(A)^k} = 0$.

- (c) Soit x un vecteur positif non-nul. Déterminer la limite de $\frac{A^k x}{\rho(A)^k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

La propriété (iv) est démontrée.

Solution :