Feuille d'exercices 4
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 3.

- $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,
- $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z-1} = -\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$,
- $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z-1}\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = 1 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Exercice 4.

(d) Cette équation est définie sur $\mathbb{C}^*$.
De plus : $z + \dfrac{1}{z} = i\left(\dfrac{3}{z} - 1\right) \Leftrightarrow z^2 + (1+i)z - 3i = 0$.
C'est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = (1+i)^2 + 4 \times 3i = 14i = 14e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Une racine carrée de Δ est alors $\delta = \sqrt{14}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{7} + \sqrt{7}i$.
Les solutions de l'équation sont donc $z_{1,2} = \dfrac{-(1+i) \pm \delta}{2} = -\dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{2} - \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{2}i$.

Exercice 20.

(b) Les points sont alignés si et seulement si $\dfrac{\frac{1}{z} - z}{(z-i) - z} \in \mathbb{R}$. Or : $\dfrac{\frac{1}{z} - z}{(z-i) - z} = i\left(\dfrac{1}{z} - z\right)$, donc :

$$\frac{\frac{1}{z} - z}{(z-i) - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z} - z\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1.$$

L'ensemble des points solution est donc la réunion de l'axe des ordonnées et du cercle unité.