# Feuille d'exercices 4

# ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 3. 
$$\bullet \ \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R},$$

$$\bullet \ \frac{z+1}{z-1} \in i \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = -\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U},$$

• 
$$\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow z+\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}.$$

#### Exercice 4.

(d) Cette équation est définie sur  $\mathbb{C}^*$ .

De plus : 
$$z + \frac{1}{z} = i\left(\frac{3}{z} - 1\right) \Leftrightarrow z^2 + (1+i)z - 3i = 0.$$

C'est une équation du second degré, de discriminant  $\Delta=(1+i)^2+4\times 3i=14i=14e^{i\frac{\pi}{2}}.$  Une racine carrée de  $\Delta$  est alors  $\delta=\sqrt{14}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{7}+\sqrt{7}i.$ 

Les solutions de l'équation sont donc 
$$z_{1,2}=\frac{-(1+i)\pm\delta}{2}=-\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}-\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}i.$$

### Exercice 6.

(b) Notons z = x + iy. Alors:

$$e^{i\pi z}=1-i \Leftrightarrow e^{-\pi y}e^{i\pi x}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \left(y=-\frac{\ln(2)}{2\pi} \text{ et } x=-\frac{1}{4}+2k\right) \Leftrightarrow z=2k-\frac{1}{4}-i\frac{\ln(2)}{2\pi}, \quad \text{où } k\in\mathbb{Z}.$$

**Exercice 8.** Supposons qu'il existe une solution z.

Alors 
$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$
, donc  $|z| = 1$ , donc  $z \in \mathbb{U}$ .

De plus, |z| = |1 - z|, donc le point d'affixe z appartient à la médiatrice des points d'affixe 0 et 1, c'est-à-dire à la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$ .

Donc 
$$z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$
.

Réciproquement,  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $e^{-i\frac{\pi}{3}}$  sont solutions, donc :  $S=\left\{e^{i\frac{\pi}{3}},\;e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$ .

## Exercice 11.

(c)

$$\cos^{2}(2x)\sin(4x) = \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right)^{2} \frac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i}$$

$$= \frac{1}{8i} \left(e^{i8x} - e^{-i8x} + 2e^{i4x} - 2e^{-i4x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sin(8x) + \frac{1}{2}\sin(4x).$$

(d) 
$$\cos(x)\cos(2x)\cos(3x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2}$$
$$= \frac{1}{8} \left( 2 + e^{i2x} + e^{-i2x} + e^{i4x} + e^{-i4x} + e^{i6x} + e^{-i6x} \right)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{4}\cos(6x).$$

## Exercice 13.

(a)

$$\sin^2 x \le \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \mod 2\pi,$$

(b)

$$\begin{aligned} \cos x &> \sin x &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \\ &\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[ \mod 2\pi, \end{aligned}$$

(c)

$$\sin x < \sqrt{3}\cos x \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right[ \mod 2\pi,$$

(d)

$$\cos x + \sin x \ge 1 \iff \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4} \mod 2\pi$$
$$\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mod 2\pi.$$

# Exercice 14.

(a) 
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right), \text{ où }:$$

$$\begin{split} \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{i\frac{nx}{2}} - e^{-i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= e^{i\frac{(n-1)x}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \end{split}$$

donc 
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
.

(b) 
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right)$$
, où :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = (1 + e^{ix})^n$$

$$= e^{i\frac{nx}{2}} \left( e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}} \right)$$

$$= e^{i\frac{nx}{2}} \times 2^n \cos^n \left( \frac{x}{2} \right)$$

donc 
$$\sum_{k=0}^{n} {n \choose k} \sin(kx) = 2^n \cos^n \left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$
.

(c) 
$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2kx)\right) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i2kx}\right)$$
, où :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i2kx} = \frac{1 - e^{i2nx}}{1 - e^{i2x}}$$

$$= \frac{e^{inx}}{e^{ix}} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}}$$

$$= e^{i(n-1)x} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)},$$

donc 
$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\cos((n-1)x)\sin(nx)}{\sin(x)}$$
.

**Exercice 19.** L'ensemble recherché est l'ensemble des points d'affixe  $\frac{1}{1-e^{i\theta}}$ , où  $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . Or :

$$\frac{1}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{1}{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

où  $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$  parcourt  $\mathbb R$  quand  $\theta$  parcourt  $\mathbb R\setminus 2\pi\mathbb Z$ .

Donc l'image du cercle unité par cette application est la droite d'équation cartésienne  $x = \frac{1}{2}$ .

#### Exercice 20.

(b) Les points sont alignés si et seulement si  $\frac{\frac{1}{z}-z}{(z-i)-z} \in \mathbb{R}$ . Or :  $\frac{\frac{1}{z}-z}{(z-i)-z} = i\left(\frac{1}{z}-z\right)$ , donc :

$$\frac{\frac{1}{z} - z}{(z - i) - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z} - z\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1.$$

L'ensemble des points solution est donc la réunion de l'axe des ordonnées et du cercle unité.