

Devoir à la maison n° 2

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Par application directe de la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1^n = 1.$$

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\stackrel{l=k-1}{=} n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} x^{l+1} (1-x)^{n-l-1} \\ &\stackrel{\text{d'après 1.}}{=} nx. \end{aligned}$$

3. Si $n = 1$, l'égalité voulue est trivialement vraie.

Si $n \geq 2$, on procède comme précédemment : soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, alors :

$$k(k-1) \binom{n}{k} = k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\stackrel{l=k-2}{=} n(n-1) \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} x^{l+2} (1-x)^{n-l-2} \\ &\stackrel{\text{d'après 1.}}{=} n(n-1)x^2. \end{aligned}$$

4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a : $\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = x^2 - 2\frac{kx}{n} + \frac{k^2}{n^2}$,

où $k^2 = k(k-1) + k$, donc :

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x^2 \times A - 2\frac{x}{n} \times B + \frac{1}{n^2} \times (C + B),$$

où A , B et C sont respectivement les sommes calculées aux questions 1, 2 et 3. Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x^2 - 2x^2 + \frac{(n-1)x^2 + x}{n} = \frac{x - x^2}{n} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Exercice 2.

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. On a :

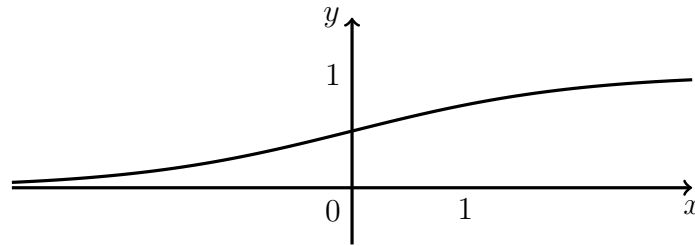
$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} \\ &= \frac{(1+e^x) + (1+e^{-x})}{(1+e^{-x})(1+e^x)} \\ &= \frac{2+e^x+e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Soit x dans $\mathbb{R}$. D'après la question précédente : $g(-x) = f(-x) - \frac{1}{2} = (1 - f(x)) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - f(x) = -g(x)$, donc g est impaire. Le graphe de g est donc symétrique par rapport à l'origine du plan, donc le graphe de f , translaté du graphe de g par le vecteur $\frac{1}{2}j$, est symétrique par rapport au point $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

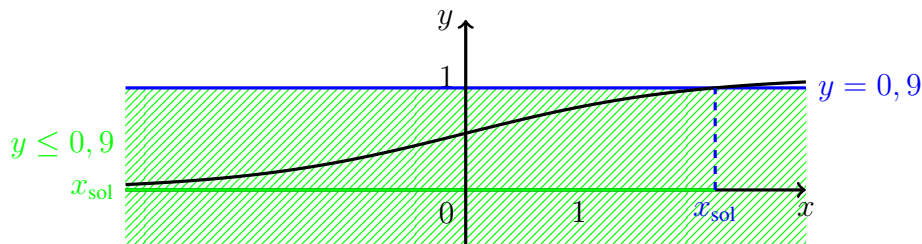
3. Notons $j : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $h : x \mapsto e^{-x}$. On a $f = j \circ h$; comme j et h sont décroissantes, f est donc croissante.

4. Comme $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

5.



6.



On a :

$$f(x) = 0,9 \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-x}} = 0,9 \Leftrightarrow 1+e^{-x} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow x = \ln 9 = 2 \ln 3.$$

Cette équation a donc pour ensemble de solutions $S = \{2 \ln 3\}$.

De même :

$$f(x) \leq 0,9 \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-x}} \leq 0,9 \Leftrightarrow 1+e^{-x} \geq \frac{10}{9} \Leftrightarrow e^{-x} \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow -x \geq \ln\left(\frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow x \leq \ln 9 = 2 \ln 3.$$

Cette équation a donc pour ensemble de solutions $S =]-\infty, 2 \ln 3]$.