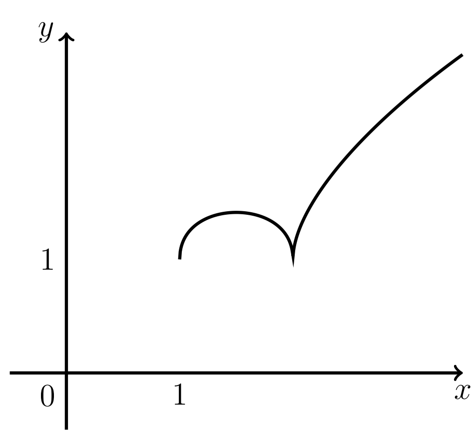
Devoir surveillé n° 2
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre $f(x)$ est défini lorsque $x-1 \geq 0$, donc le domaine de définition de f est $[1,+\infty[$.
2. La fonction f est la somme de $x \mapsto \sqrt{x-1}$, composée de $g : x \mapsto x-1$ par $h : x \mapsto \sqrt{x}$, et de $x \mapsto \sqrt{|x-2|}$, composée de $j : x \mapsto |x-2|$ par h. Comme g, h et j sont usuellement dérivables sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ respectivement, $f'(x)$ existe lorsque $x-1>0$ et $|x-2|>0$. Donc $D'_f =]1,2[\cup]2,+\infty[$.
3. Soit $x \in]1,2[$. On a : $f(x) = \sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$, donc, d'après la formule de dérivation d'une composée : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$.
4. D'après le calcul précédent :
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{2-x}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < \sqrt{2-x}.$$
Par conséquent, comme $x-1>0$ et $2-x>0$:
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x-1 < 2-x \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$
Donc la fonction f' est strictement positive sur $\left]1, \dfrac{3}{2}\right[$ et négative sur $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right[$.
5. Pour tout x dans $[2,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$, donc f est la somme de deux fonctions croissantes, donc est croissante sur $[2,+\infty[$.
6.

x	1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f			$\sqrt{2}$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	1				1		

7.



Exercice 2.

1. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k =$ « $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ ».

   Pour $k = 1$: d'une part, $\displaystyle\sum_{j=1}^{1} j^2 = 1^2 = 1$; d'autre part, $\displaystyle\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$, donc P_1 est vraie.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons P_k vraie, montrons P_{k+1} :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.
\end{aligned}$$

   Donc P_{k+1} est vraie, donc P_k est héréditaire.
   Donc, par récurrence, P_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. On a $\displaystyle S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k^3 + 3k^2 + k = \frac{1}{3}C + \frac{1}{2}B + \frac{1}{6}A$ par linéarité.

3. On a $\displaystyle S = \sum_{1 \le j \le k \le n} j^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} j^2 = \sum_{j=1}^{n}(n-j+1)j^2 = \sum_{j=1}^{n}(n+1)j^2 - j^3 = (n+1)B - C$.

4. D'après les questions précédentes, $\displaystyle\frac{1}{3}C + \frac{1}{2}B + \frac{1}{6}A = (n+1)B - C$, donc :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{3}{4}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)B - \frac{1}{6}A\right) \\
&= \frac{2n+1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{8} - \frac{n(n+1)}{16} \\
&= \frac{n(n+1)}{16}((2n+1)^2 - 1) \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) &= \sum_{l=2}^{n+1} l(l-1)(l+1) \quad \text{en posant } l = k+1 \\
&= \sum_{l=2}^{n+1} l^3 - l \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{n^2+3n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. La fonction $\cos$ est 2π-périodique d'après le cours. Soient $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\sqrt{2}(x+T)) = \cos(\sqrt{2}x + \sqrt{2}T)$. Donc $x \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$ est T-périodique si $\sqrt{2}T = 2\pi$, donc pour $T = \sqrt{2}\pi$.
2. La fonction f est dérivable comme composée de fonctions usuelles. On a :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin(x) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)$, donc $f''(x) = -\cos(x) - 2\cos(\sqrt{2}x)$.
3. Par hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$. Donc en dérivant cette égalité :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+T) = f'(x)$, puis $f''(x+T) = f''(x)$. Donc f' et f'' sont T-périodiques.
4. Comme f et f'' sont T-périodiques, on a :
$f(T) = f(0) = \cos(0) + \cos(0) = 2$ et $f''(T) = f''(0) = -\cos(0) - 2\cos(0) = -3$.
5. On a $\cos(T) + \cos(\sqrt{2}T) = 2$ et $-\cos(T) - 2\cos(\sqrt{2}T) = -3$, donc en sommant :
$-\cos(\sqrt{2}T) = -1$, donc $\cos(\sqrt{2}T) = 1$. Donc $\cos(T) = 2 - \cos(\sqrt{2}T) = 2 - 1 = 1$.
6. Comme $\cos(T) = 1$, on a $T = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. De même, comme $\cos(\sqrt{2}T) = 1$, on a $T = \sqrt{2}l\pi$ où $l \in \mathbb{Z}$. Or $T \neq 0$, donc par quotient : $1 = \sqrt{2}\frac{k}{l}$, donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux. Donc par l'absurde, f n'est pas périodique.

Problème.

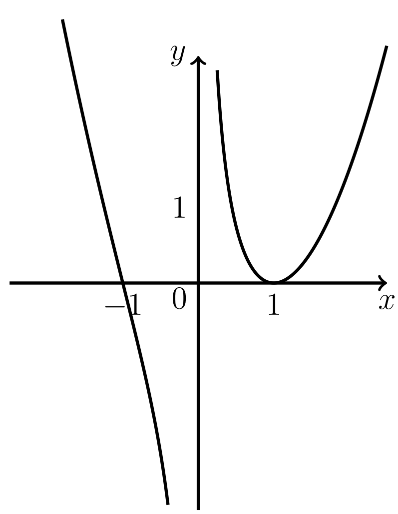
I. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre $f(x)$ est défini lorsque $x \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R}^*$. Sur ce domaine, comme la fonction f est un quotient de fonctions polynomiales, f est dérivable.

(b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{(3x^2-2x-1)\times x - (x^3-x^2-x+1)\times 1}{x^2} = \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2}$.
En particulier, $f'(1) = 0$, donc la courbe de f a pour tangente en 1 la droite d'équation cartésienne $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 0$; c'est-à-dire l'axe des abscisses.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Le trinôme $2x^3 - x^2 - 1$ a pour racine évidente 1, donc $2x^3 - x^2 - 1 = (x-1)(2x^2+x+1)$, où $2x^2+x+1$ a pour discriminant -7 et pour coefficient dominant $2 > 0$, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^2+x+1 > 0$. Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

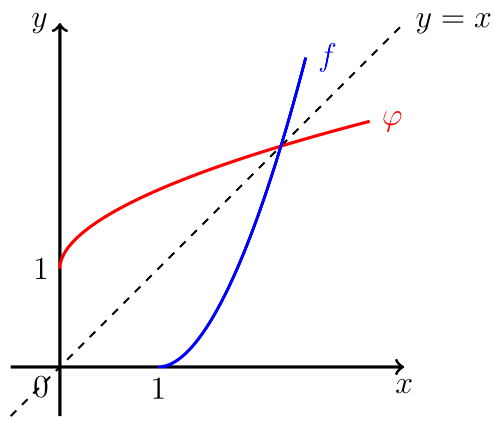
x	$-\infty$		0_-	0_+		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$-$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(d)



(e) Comme f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$, d'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ dans $J = \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0,+\infty[$.

(f) D'après le théorème de la bijection continue, la fonction $\varphi : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ est continue et strictement croissante. On sait également que φ est dérivable lorsque f' ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $]0,+\infty[$.



II. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre $g(x)$ est défini lorsque $f(x) \in [0,+\infty[$, c'est-à-dire lorsque $x \leq -1$ ou $x > 0$. Donc $D_g =]-\infty,-1] \cup]0,+\infty[$. Sur $[1,+\infty[$, comme φ est la réciproque de f, on a : $\forall x \in [1,+\infty[,\ g(x) = x$.

(b) Comme g est la composée de fonctions continues, g est continue sur D_g. De plus, g est dérivable lorsque f est dérivable et que $f(x)$ appartient au domaine de dérivabilité de φ, donc sur $I = D_g \setminus \{\pm 1\} =]-\infty,-1[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$.

(c) Comme, sur I, $g' = f' \cdot \varphi' \circ f$, g' est de même signe que f'. D'où le tableau :

x	$-\infty$		-1	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$			$-$	$\Vert$	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(d) i. Comme $y = g(x)$, on a $f(y) = f(g(x)) = f \circ \varphi(f(x))$, donc, comme $f \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ et que $f(x) \in \mathbb{R}_+$, $f(y) = f(x)$. Donc : $\dfrac{y^3 - y^2 - y + 1}{y} = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x}$, d'où l'égalité voulue.

ii. Comme $y = g(x)$, $y \in g(D_g)$, donc $y \geq 1$. Donc $y \neq x$.

iii. — Si $x \geq 1$, on sait que $g(x) = x$,

— Si $x < 1$, on note $y = g(x)$. D'après les questions précédentes, on a : $xy^2 + (x^2 - x)y - 1 = 0$, donc : $y = \dfrac{x - x^2 \pm \sqrt{(x-x^2)^2 + 4x}}{2x}$. Or, d'après le tableau de variations, $y \geq 1$. Comme le produit de ces racines est égal à $-\dfrac{1}{x}$:

— Si $x \geq 0$, alors $g(x) = \dfrac{x - x^2 + \sqrt{(x-x^2)^2 + 4x}}{2x}$, seule racine positive,

— Si $x \leq -1$, alors $g(x) = \dfrac{x - x^2 - \sqrt{(x-x^2)^2 + 4x}}{2x}$, seule racine ≥ 1.

(e) Soit $x \in]0, 1[$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)-1}{x-1} &= \frac{1}{x-1}\left(\frac{x-x^2+\sqrt{x^4-2x^3+x^2+4x}}{2x}-1\right) \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^4-2x^3+x^2+4x}-2x}{2x(x-1)} \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{x^4-2x^3+x^2+4x-4x^2}{2x(x-1)(\sqrt{x^4-2x^3+x^2+4x}+2x)} \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{x(x-1)(x^2-x-4)}{2x(x-1)(\sqrt{x^4-2x^3+x^2+4x}+2x)} \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{x^2-x-4}{2(\sqrt{x^4-2x^3+x^2+4x}+2x)}.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on a donc : $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} \underset{x\to 1_-}{\longrightarrow} -1$, donc g est dérivable à gauche en 1, de nombre dérivé à gauche -1. Or on sait que le nombre dérivé de g à droite en 1 est 1 (puisque $g(x) = x$ à droite de 1). Donc g n'est pas dérivable en 1.

(f)