TD 9 : Normes et retour sur TD8

Exercice ($\star\star$) 1 *(Matrices compagnons ou de Froebenius)*
Soient $n \geq 2$ *et* $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. *On pose :*

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & (0) & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) \text{ (matrice compagnon de } P\text{).}$$

On rappelle que le rang d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice.
a) Déterminer suivant a_0 *le rang de* C_P.
(Observer que les $n-1$ *premières colonnes sont libres).*
b) En examinant le rang de $C_P - \lambda I_n$ *et sans chercher à déterminer valeur ou vecteur propre, prouver que tout sous-espace propre de* C_P *est de dimension 1.*
(Prenez en compte que le noyau de $C_P - \lambda I_n$ *est au moins de dimension 1)*
c) En le calculant, prouver que P *est le polynôme caractéristique de* C_P*(On pourra procéder par récurrence).*
d) Trouver une CNS portant sur P *pour que* C_P *soit diagonalisable.*
e) (Plus difficile) Prouver le théorème de Cayley-Hamilton pour la matrice C_P.

Exercice ($\star$) 1 *Pour* $P \in \mathbb{R}[X]$, *on pose* $N(P) = \sum_{n=0}^{\infty} |P^{(n)}(1)|$.
Etablir que N *est une norme sur* $\mathbb{R}[X]$.
(On justifiera la définition de N*).*

Exercice ($\star$) 2 *i) Pour* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *prouver que, si on pose* $S(A) = \sqrt{tr(A^t A)}$, S *est une norme sur* $M_n(\mathbb{R})$.
(On pourra utiliser la norme euclidienne $\|.\|_2$ *sur un espace approprié)*
ii) (Plus difficile) Comparer $S(AB)$ *et* $S(A)S(B)$, *pour* $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$

Exercice ($\star$) 3 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel et* ϕ *une application de* E *dans* $\mathbb{R}^+$ *qui soit homogène.*
a) Que vaut $\phi(0)$ *?*
b) Donner pour E *de votre choix une telle application qui en outre vérifie l'inégalité triangulaire sans satisfaire la propriété de séparation.*

Exercice ($\star\star$) 2 *Existe-t-il une norme* N *sur* $M_n(\mathbb{C})$ *telle que* $N(AB) \geq N(A)N(B)$ *pour tout* $(A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ *?*
(Penser aux matrices nilpotentes).

Exercice ($\star\star\star$) 1 *a) On note* $J(\lambda) \in M_n(\mathbb{R})$ *la matrice dont le coefficient situé sur la première ligne et la n-ième colonne vaut* λ *sachant que tous ses autres coefficients sont nuls.*
Prouver que pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $J(\lambda) \sim J(1)$.
b) Existe-t-il une norme N *sur* $M_n(\mathbb{R})$ *telle que :*
$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall P \in GL_n(\mathbb{C}), N(P^{-1}AP) = N(A)$ *?*