
Corrigé du DS 2 CCINP+ (4 heures).

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Tout manquement à ces consignes sera sanctionné.

.....

PROBLEME 1 : Racine cubique d'une matrice

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A .

Partie I - Étude d'exemples

Dans cette partie, on considère notamment la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A .

1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Solution :

On montre que A est diagonalisable en évaluant son polynôme caractéristique.

Comme $\chi_A = X^2 - 9X + 8 = (X - 1)(X - 8)$, celui-ci étant scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples, A est bien diagonalisable et son spectre est l'ensemble $\{1, 8\}$. De ceci il résulte bien l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ ■

2. Montrer qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D .

Solution :

$B^3 = A$ signifie que $B^3 = A = PDP^{-1}$ donc que $(P^{-1}BP)^3 = D$ soit Δ racine cubique de D .

Réciproque similaire ■

3. Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D . Montrer que les matrices D et Δ commutent, puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.

Solution :

$D\Delta = D^4 = \Delta D$ donc ces deux matrices commutent.

Posons $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. De $D\Delta = \Delta D$ on déduit $b = 8b$ et $8c = c$ soit $b = c = 0$ donc que Δ est bien

diagonale■

4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D , puis l'ensemble des racines cubiques de A . On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ .

Solution :

Δ est une racine cubique de D équivaut donc à dire qu'il existe deux réels a, d tels que $\Delta = \text{diag}(a, d)$ et $\Delta^3 = \text{diag}(1, 8)$ d'après ce qui précède. Ainsi D possède une seule racine cubique $\boxed{\text{diag}(1, 2)}$ ■

Par 2. on en déduit que A possède une unique racine cubique à savoir $\boxed{P\text{diag}(1, 2)P^{-1}}$ ■

5. (Un exemple plus général)

Soit S une matrice de symétrie de taille $n \geq 1$ et à coefficients réels.

Déterminer une racine cubique de S .

Solution :

Comme $S^2 = I_n$ alors $S^3 = S$ et S est une racine cubique d'elle même■

Partie II - Un peu de trigonométrie

On fixe également un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et on note :

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

5. Prouver que, pour les réels α et β , $M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha + \beta)$?

Solution :

Simple calcul utilisant les formules d'addition des fonctions trigonométriques■

6. En déduire une racine cubique de la matrice M .

Solution :

De 5. on déduit que $M(\frac{\theta}{3})$ est une racine cubique de $M(\theta)$ ■

7. Y-en-a-t-il d'autres?

Solution :

Oui. Par exemple $M(\frac{\theta + 2\pi}{3})$ ■

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de la matrice A .

III. 1 - Existence d'une racine cubique polynomiale

8. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

Solution :

Il est assez évident qu'une telle racine cubique est $H_p(\sqrt[3]{\lambda})$ ■

9. Déduire de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique. On pourra remarquer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme $H_p(\lambda)$ avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

Solution :

Il existe une matrice inversible P telle que $A = P \text{diag}(H_{p_1}(\lambda_1), \dots, H_{p_d}(\lambda_p)) P^{-1}$, où p_i désigne la multiplicité de λ_i pour $1 \leq i \leq d$.

Dès lors avec la question précédente et la partie I adaptée on déduit que :

$$\boxed{P \text{diag}(H_{p_1}(\sqrt[3]{\lambda_1}), \dots, H_{p_d}(\sqrt[3]{\lambda_p})) P^{-1}} \text{ est une racine cubique de } A \blacksquare$$

III. 2 - Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^d (X^3 - \lambda_k)$$

10. Montrer que les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont non nuls.

Solution :

A étant inversible, 0 n'en est pas une valeur propre $\blacksquare$

11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous la forme $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.

Solution :

Les trois solutions sont les $\boxed{\sqrt[3]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{3}}, \text{ où } k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket} \blacksquare$

12. En déduire que le polynôme Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Solution :

Pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $X^3 - \lambda_k$ est scindé en vertu de 10. et 11.

Par ailleurs ces polynômes pris deux à deux admettent des racines différentes donc Q est bien scindé sur $\mathbb{C}$ et à racines simples $\blacksquare$

13. Déduire des questions précédentes que si B est une racine cubique de A , alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution :

Puisque $Q(B) = P(A)$, où $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$.

Comme P est (cf cours) un polynôme annulateur de A , il en résulte que B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puisque Q en est un polynôme annulateur à racines simples $\blacksquare$

PROBLEME 2 : Matrices de rang 1

Dans cette partie, A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

1. On note $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A . Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.

Solution :

Il existe des réels $a_1, \dots, a_n$ non tous nuls tels que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_i(A) = a_i C$.

Dès lors en posant $L = (a_1 \dots a_n)$, on a bien $A = CL$ $\blacksquare$

2. Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \text{tr}(A)A$.

Solution :

On notera (cf Q1) que $A = (c_i a_j)$, où on a posé $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Par ailleurs $LC = \sum_{i=1}^n a_i c_i = \text{tr}(A) \square$

Enfin $A^2 = CLCL = C(LC)L = \text{tr}(A)CL = \text{tr}(A)A$ par associativité du produit matriciel ■

3. Déterminer le polynôme caractéristique de A .

Solution :

Le rang de A valant 1, la dimension de $\text{Ker}(A)$ est de dimension $n - 1$.

Donc 0 en tant que vp de A possède une multiplicité au moins égale à cette dimension et cela montre qu'il existe un réel a tel que :

$\chi_A = X^{n-1}(X - a) = X^n - aX^{n-1}$ et, grâce au cours $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1}$ ■

4. Établir que

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \text{tr}(A) \neq 0.$$

Solution :

Si $\text{tr}(A) \neq 0$ Q.2 fournit en $X(X - a)$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples qui est de plus polynôme annulateur de A . Ainsi A est dz ■

Si $\text{tr}(A) = 0$, par Q.3, A est nilpotente et non nulle (car de rang 1) donc A n'est pas dz. Ceci prouve l'implication inverse ■

On note désormais u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

5. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Justifier que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$, puis qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Solution :

Cette intersection n'étant pas réduite au vecteur nul, elle est au moins de dimension 1 et de plus incluse dans l'image de u qui possède la même dimension. Ainsi $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \text{Im}(u)$. Ceci prouve que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ ■

Prenons x_2 dirigeant $\text{Im}(u)$ et posons x_1 comme étant un antécédent de x_2 (cet antécédent n'appartient pas bien sûr à $\text{Ker}(u)$).

On complète x_2 avec $x_3, \dots, x_n$ pour obtenir une base de $\text{Ker}(u)$.

Dans la base $(x_1, \dots, x_n)$ la matrice de u est bien de la forme souhaitée ■

6. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul.

Solution :

De part la formule du rang cette fois, $\mathbb{R}^n = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$. Il suffit alors de considérer une base $(y_1, \dots, y_n)$ adaptée à cette somme directe pour avoir la matrice désirée puisque $u(y_1) \in \text{Im}(u) = \text{Vect}(y_1)$ soit l'existence d'un réel a tel que $u(y_1) = ay_1$ ($a \neq 0$ sinon matrice nulle) ■

7. Conclure que dans $M_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

Solution :

Une seule implication mérite de l'attention.

On se donne deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$, de rang 1 et de même trace.

Montrons qu'elles sont semblables en considérant f_A et f_B les endomorphismes canoniquement associés à ces matrices.

Si $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$ Q.5 montre que f_A et f_B sont représentés par une même matrice donc $A \sim B$.

Sinon Q.6 prouve la même chose ■

PROBLEME 3 : Étude d'un endomorphisme matriciel

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi_A : M \mapsto AM$. En particulier, on remarque qu'en notant O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice d'identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors φ_{O_n} est l'application nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_{I_n} est l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application φ_A .

Partie I - Généralités

Q1. Montrer pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'application φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q2. Montrer pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ que $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

Q3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dédurre de la question précédente que φ_A est un isomorphisme si et seulement si la matrice A est inversible. Indication : si φ_A est un isomorphisme, on pourra considérer un antécédent par φ_A de la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution :

Si $A \in \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ alors $\phi_A \circ \phi_{A^{-1}} = \phi_{A^{-1}} \circ \phi_A = \phi_{I_n} = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Ceci montre que ϕ_A est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ □

Inversement on considère, comme suggéré, l'antécédent de I_n par ϕ_A que l'on note B . Par conséquent $AB = I_n$, ce qui montre que $A \in \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ ■

Partie II - Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$. On considère un nombre $a \in \mathbb{C}$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Q4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre $a \in \mathbb{C}$ pour que la matrice A soit diagonalisable.

Solution :

Si $a \neq 1$, le spectre de A contenant deux éléments distincts a et 1, A est diagonalisable □

Si $a = 1$, le spectre de A est le singleton $\{1\}$ et A n'est pas scalaire. Ce qui montre la réciproque.

$A \text{ dz} \iff a \neq 1$ ■

Q5. Déterminer la matrice de φ_A dans la base $C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Solution :

Après calcul et en notant M cette matrice (carrée de taille 4), on trouve $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ■

Q6. En déduire les valeurs propres de φ_A , puis déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de

φ_A en fonction de $a \in \mathbb{C}$. **Solution :**

En utilisant M , il vient $Sp(A) = \{1, a\}$ $\square$

Pour les dimensions on passe aux rangs.

On trouve aisément $rg(M - I_4) = 2$ et $rg(M - aI_4) = 2$. Donc les espaces propres sont aussi de dimension 2 $\blacksquare$

Q7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que φ_A soit diagonalisable.

Solution :

Si $a = 1$, le spectre de A est réduit à $\{1\}$ et A n'est pas scalaire donc A n'est pas dz $\square$

Si $a \neq 1$ $\dim(E_1(A) + \dim E_a(A)) = 4$ donc A est dz $\square$

$A \text{ dz} \iff a \neq 1$ $\blacksquare$

Partie III - Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice A et ceux de l'endomorphisme φ_A .

Q8. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.

Solution :

Q.2 et récurrence $\blacksquare$

Q9. En déduire pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

Solution :

Propriétés opérations sur les matrices avec la question précédente $\blacksquare$

Q10. Rappeler la caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur. En déduire que la matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

Solution :

Q.9 montre que A et ϕ_A ont les mêmes polynômes annulateurs d'où l'équivalence désirée $\blacksquare$

Q11. On note χ_A le polynôme caractéristique de A . Montrer que $\chi_A(\varphi_A)$ est l'endomorphisme nul. En déduire une inclusion entre l'ensemble des valeurs propres de A et l'ensemble des valeurs propres de φ_A , puis que la matrice A et l'endomorphisme φ_A ont les mêmes valeurs propres.

Solution :

χ_A polynôme annulateur de A (Cayley-Hamilton) implique la même chose pour ϕ_A et ainsi le spectre de cet endomorphisme est inclus dans l'ensemble des zéros de χ_A qui est exactement le spectre de A .

On trouve l'inclusion inverse en partant du polynôme caractéristique de ϕ_A $\blacksquare$

Q12. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dans le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ de φ_A pour la valeur propre λ si et seulement si chaque colonne de la matrice M est dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de la matrice A pour la valeur propre λ .

Solution :

On traduit $AM = \lambda M$ en raisonnant sur les colonnes. Ce qui équivaut à $AC_i(M) = \lambda C_i(M)$ et prouve l'assertion désirée $\blacksquare$

On déduit directement de la question précédente que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A , l'application Ψ qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe le n -uplet de ses colonnes :

$$\Psi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} \right)$$

est un isomorphisme du sous-espace propre de $E_\lambda(\varphi_A)$ sur $E_\lambda(A)^n$.

Q13. Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, déduire des résultats de cette partie une expression du déterminant et de la trace de φ_A en fonction du déterminant et de la trace de A .

Solution :

Posons $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, où les λ_i deux à deux différentes et on posera $n_i = \dim(E_{\lambda_i}(A))$ (notez que la diagonalisabilité de A entraîne que $\sum_{i=1}^s n_i = n$).

A étant dz, ϕ_A l'est aussi (Q10.) donc $M_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(\phi_A)$.

Ainsi dans une base adaptée ϕ_A est représenté par $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \dots, \lambda_s)$, où chaque λ_i apparaît n_i

fois (cf préambule à cette question). Dès lors $tr(\phi_A) = n \sum_{i=1}^s n_i \lambda_i = ntr(A)$ et $\det(\phi_A) = (\det(A))^n$ ■

FIN