Devoir à la maison n° 2

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$.
4. Déduire des questions précédentes que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Exercice 2. On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+e^{-x}} \end{array} \right.$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(-x) = 1$.
2. En déduire que la fonction $g : x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{2}$ est impaire. Que peut-on en déduire sur la courbe de f ?
3. Déterminer le sens de variation de f.
4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
5. Tracer la courbe de f.
6. Représenter les équations d'inconnue réelle x : $f(x) = 0,9$ et $f(x) \leq 0,9$ sur la courbe de f.
   Résoudre algébriquement ces équations.