

Corrigé partiel du TD 8 : Réduction (II)

Réchauffé 1 Montrer, par l'absurde, qu'il n'existe pas de matrice $X \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Réchauffé 2 Prouver, en la considérant comme élément de $M_n(\mathbb{C})$, que la seule matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 = I_n$ et $\text{tr}(M) = n$ est la matrice unité de taille n .

Exercice (*) 1 Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle semblable à $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice (*) 2 Prouver que la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ est nilpotente. En préciser les éléments propres.

Etablir que N est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice () 1** Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, 2\}$ et $\text{tr}(A) = 4$. Exprimer A^{2025} en fonction de I_3 , A et A^2 . Cette expression est-elle nécessairement unique?

Solution :

Non pour l'unicité. Prenons $A = \text{diag}(1, 1, 2)$ alors $A^{2025} = (2^{2025} - 1)A + (2 - 2^{2025})I_3$ mais aussi $A^{2025} = (2^{2024} - 1)A^2 + (2 - 2^{2024})A$ ■

Exercice () 2** Soit $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$.

Combien y-a-t-il de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables à D et commutant avec D ?

Solution :

Comme expliqué et montré en classe une matrice qui commute avec D est nécessairement diagonale. On est donc ramené à dénombrer les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (Spectre = invariant de similitude). On trouve $n!$ telles matrices (nombre de permutations possibles de la diagonale de D) ■

Exercice (*) 1** On se donne $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

La matrice $M = \begin{pmatrix} 4A & -2A \\ 3A & -A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

Exercice (*) 1** (Matrices compagnons ou de Froebenius)

Soient $n \geq 2$ et $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On pose :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & \ddots & 0 & \vdots & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) \text{ (matrice compagnon de } P \text{).}$$

- Déterminer suivant a_0 le rang de C_P .
- En examinant le rang de $C_P - \lambda I_n$ et sans chercher à déterminer valeur ou vecteur propre, prouver que tout sous-espace propre de C_P est de dimension 1.
- En le calculant, prouver que P est le polynôme caractéristique de C_P .
- Trouver une CNS portant sur P pour que C_P soit diagonalisable.

Exercice (*) 2** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Que dire de A ?**Solution :**

On va montrer que le spectre de A est réduit à $\{0\}$ (autrement dit que A est nilpotente.).

A étant tz $A \sim T$, avec T triangulaire de diagonale $t_1, \dots, t_1, t_2, \dots, t_2, \dots, t_s, \dots, t_s, 0, \dots, 0$ chaque t_i apparaissant n_i fois et 0 r fois (ces entiers pouvant être nuls). On suppose les $t_i \neq 0$ et distincts deux à deux.

On a donc $\chi_A = X^r \prod_{i=1}^s (X - t_i)^{n_i}$ et on va prouver que tous les n_i son nuls. Ce qui montrera que 0 est la seule vp de A.

La similitude A et T entraîne celle de A^k et T^k pour tout entier naturel k .

On suppose donc $s \geq 1$ (sinon fini).

Ainsi pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$: $0 = \text{tr}(A^k) = \text{tr}(T^k) = \sum_{i=1}^s n_i t_i^k$. Matriciellement ceci se traduit par

$$M \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix} = 0_{s,1}, \text{ où } \det(M) = \left(\prod_{i=1}^s t_i \right) V(t_1, \dots, t_s) \neq 0. \text{ Cela implique, via l'inversibilité de } M, \text{ que}$$

tous les n_i sont nuls comme attendu ■