CCINP (Corrigé succinct) : Réduction pratique

On posera $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Q.7

a) On résout $BX = 0_{3,1}$ et on trouve $Ker(B) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})\square$

b) On va préciser le polynôme caractéristique de B en remarquant que cette matrice est pseudo-stochastique. On ajoute les deux dernières colonnes de χ_B et ainsi, par linéarité suivant la première colonne, on peut factoriser par λ. On retranche alors la première ligne aux deux autres et on développe enfin suivant la première colonne.

On trouve $\boxed{\chi_B = X(X-2)(X-3)}$.

Le polynôme caractéristique de B étant scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples : $\boxed{\text{B est dz}}$.

On sait en outre que $\boxed{Sp(B) = \{0,2,3\}}$ et que chaque espace propre de B est une droite vectorielle.

c) On choisit $\boxed{D = diag(0,2,3)}$ donc pour P la première colonne sera une colonne propre de 0, la seconde une de 2,etc....

Ceci nous oblige à déterminer les espaces propres $E_2(B)$ et $E_3(B)$.

Pour cela on résout $BX = 2X$ et on trouve $E_2(B) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$ puis on passe à $BX = 3X$ et on trouve $E_3(B) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

A partir de là $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}\square$

Q.8

a)$C = B^t$ donc $C = (P^t)^{-1}DP^t$ en transposant les deux membres de l'égalité matricielle $B = PDP^{-1}$ et en observant que D, diagonale, est sa propre transposée.

Par transitivité de la relation de similitude C et B sont semblables (car toutes les deux semblables à D)$\square$

b) En combinant $C = (P^t)^{-1}DP^t$ et $D = P^{-1}BP$, il vient : $\boxed{C = (P^t)^{-1}P^{-1}BPP^t}$; il suffit alors de poser $R = PP^t\square$

Q.9 a) Supposons $M^2 = B$.

Alors $N^2 = P^{-1}M^2P = P^{-1}BP = P^{-1}PDP^{-1}P = D$, en se référant aux questions précédentes.

L'implication réciproque est assez évidente$\square$

b) Dans ce contexte $ND = D^3$ et $DN = D^3$ donc $ND = ND$.

Les matrices commutant avec D sont exactement les matrices diagonales (fait et à savoir faire) de taille 3.

Donc résoudre l'équation $N^2 = D$ revient à chercher les matrices diagonales telles de carré égal à $diag(0,2,3)$.

On trouve alors 4 solutions $N = diag(0, u\sqrt{2}, v\sqrt{3})$, avec $(u,v) \in \{-1,1\}^2$.

c) Compte tenu de a) et b) il y a 4 solutions à savoir $Pdiag(0, u\sqrt{2}, v\sqrt{3})P^{-1}$, avec $(u,v) \in \{-1,1\}^2\blacksquare$