

## Quelques points concernant la réduction

Dans ce qui suit  $n$  est un entier naturel non nul et  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension  $n$ .  
 $A$  désigne un élément de  $M_n(\mathbb{K})$  et  $f$  un élément de  $L(E)$ .

# 1 Caractérisation de la diagonalisabilité

## 1.1 Caractérisation géométrique

**A SAVOIR ABSOLUMENT 1** Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- i)  $A$  est diagonalisable (i.e  $A$  est semblable à une matrice diagonale).
- ii)  $M_{n,1}(\mathbb{K}) \subset \sum_{\lambda \in Sp(A)} E_{\lambda}(A)$  ( cette somme est directe et l'inclusion est une égalité ).
- iii) Il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{K}^s$  tel que  $M_{n,1}(\mathbb{K}) \subset \sum_{i=1}^s Ker(A - \lambda_i I_n)$ .  
( Noter alors que  $Sp(A) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$  et que l'inclusion est une égalité. )
- iv)  $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_{\lambda}(A)) = n$  (ou  $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_{\lambda}(A)) \geq n$  ).

On dispose d'un analogue pour les endomorphismes.

**A SAVOIR ABSOLUMENT 2** Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- i)  $f$  est diagonalisable (i.e  $E$  est la somme directe des espaces propres de  $f$ ).
- ii) Il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{K}^s$  tel que  $E \subset \sum_{i=1}^s Ker(f - \lambda_i id_E)$ .  
( Noter alors que  $Sp(f) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$  et que l'inclusion est une égalité. )
- iii) Il existe une base de  $E$ , constituée de vecteurs propres de  $f$ .
- iv)  $f$  est représenté par une matrice diagonale.
- v)  $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_{\lambda}(f)) = \dim(E) = n$  (ou  $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_{\lambda}(f)) \geq n$  ).

**Remarque 1** Ces caractérisations s'avèrent utiles lorsqu'on ne veut (ou ne peut) pas se servir du polynôme caractéristique.

## 1.2 Caractérisation algébrique

**A SAVOIR ABSOLUMENT 3** (Cas des endomorphismes)

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \begin{cases} \chi_f \text{ est scindé sur } K \\ \boxed{\text{et}} \\ \forall \lambda \in Sp(f), \dim(E_{\lambda}(f)) = m_{\lambda}(f) \end{cases}$$

De même :

**A SAVOIR ABSOLUMENT 4** (Cas des matrices)

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé sur } K \\ \boxed{\text{et}} \\ \forall \lambda \in Sp(A), \dim(E_{\lambda}(A)) = m_{\lambda}(A) \end{cases}$$

On rappelle que sur  $\mathbb{C}$  tout polynôme caractéristique est scindé.

**Remarque 2** Cette méthode s'emploie usuellement pour des matrices de petite taille ou particulières car elle nécessite une connaissance fine du polynôme caractéristique ( ses racines et leur multiplicité ).  
Noter aussi qu'en déterminant le rang de  $A - \lambda I_n$ , on peut éviter de préciser  $E_{\lambda}(A)$  pour en obtenir la dimension.

### 1.3 Diagonalisabilité via les polynômes annulateurs

Il s'agit du moyen le plus élégant.

Rappel :  $P(A) = 0_n \implies Sp(A) \subset Z_{\mathbb{K}}(P)$  (idem pour les endomorphismes).

#### A SAVOIR ABSOLUMENT 5 (Cas des matrices)

- i)  $A$  est diagonalisable  $\iff$  il existe un polynôme annulateur de  $A$  qui soit scindé sur  $K$  et à racines simples.  
ii)  $A$  est diagonalisable  $\iff \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

#### A SAVOIR ABSOLUMENT 6 (Cas des endomorphismes)

- i)  $f$  est diagonalisable  $\iff$  il existe un polynôme annulateur de  $f$  qui soit scindé sur  $K$  et à racines simples.  
ii)  $f$  est diagonalisable  $\iff \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)$  est un polynôme annulateur de  $f$ .

**Remarque 3** Si on n'est pas guidé, la recherche de polynômes annulateurs ne peut se faire que parmi des polynômes de petit degré et/ou pour des matrices particulières.

## 2 Quelques particularités

### 2.1 Une condition SUFFISANTE de diagonalisabilité

#### A SAVOIR ABSOLUMENT 7 Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $f \in L(E)$

- i) Si  $A$  possède  $n$  valeurs propres distinctes alors  $A$  est diagonalisable et chacun de ses espaces propres est une droite vectorielle.  
ii) Si  $f$  possède  $n = \dim(E)$  valeurs propres distinctes alors  $f$  est diagonalisable et chacun de ses espaces propres est une droite vectorielle.

**Remarque 4** ⚠ Ce n'est qu'une condition suffisante et penser qu'un polynôme caractéristique scindé sans être à racines simples implique le non diagonalisabilité est une GROSSE FAUTE ( cf  $I_n$  )

### 2.2 Quid des endomorphismes ( ou matrices) remarquables ?

#### Proposition 1 ( Cas des homothéties)

- i) Le spectre d'une homothétie de  $E$  est réduit à son rapport et admet  $E$  pour seul espace propre.  
ii) Si tout vecteur non nul de  $E$  est vecteur propre de  $f \in L(E)$ ,  $f$  est une homothétie de  $E$ .

**Preuve 1** ii)  $f$  est dz puisque toute base de  $E$  est constituée de vecteurs propres de  $f$ .

Supposons qu'il existe deux valeurs propres différentes pour  $f$  que nous notons  $a$  et  $b$  et que nous associons à deux vecteurs propres de  $f$   $x_a$  et  $x_b$  ( ces vecteurs forment une famille libre car attachés à des vp différentes) alors  $f(x_a + x_b) = ax_a + bx_b$ .

Mais ce dernier vecteur ( puisque  $x_a + x_b \neq 0_E$  par liberté évoquée ci-dessus) est aussi un vecteur propre de  $f$  donc  $ax_a + bx_b$  devrait être colinéaire à  $x_a + x_b$  ce qui n'est pas possible puisque  $a \neq b$ .

Dans la même veine :

#### A SAVOIR ABSOLUMENT 8 ( Cas du spectre réduit à un élément)

- i) Si le spectre d'un endomorphisme ( d'une matrice ) diagonalisable est réduit à un élément, celui-ci est une homothétie (celle-ci est une matrice scalaire).  
ii) ( Chouchou concours (♥)) Une matrice non scalaire dont le spectre est un singleton n'est pas diagonalisable.

#### A SAVOIR ABSOLUMENT 9 ( Cas des projecteurs)

Tout projecteur de  $E$  ( resp. toute matrice de projecteur de  $M_n(\mathbb{K})$  ) est diagonalisable et de spectre inclus dans  $\{0, 1\}$ .

## A SAVOIR ABSOLUMENT 10 ( Cas des symétries)

Toute symétrie de  $E$  ( resp. toute matrice de symétrie de  $M_n(\mathbb{K})$  ) est diagonalisable et de spectre inclus dans  $\{-1, 1\}$ .

## Proposition 2 ( Cas des endomorphismes nilpotents)

- i) Le spectre d'un endomorphisme nilpotent ou d'une matrice nilpotente est  $\{0\}$ .
- ii) Un endomorphisme (resp. une matrice) nilpotent(e) non nul n'est pas diagonalisable.
- iii) Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent ou d'une matrice nilpotente est  $X^n$  ( en particulier trace et déterminant de tels objets sont nuls).
- iv) Il découle de iii) et du théorème de Cayley-Hamilton que:  
Si  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est nilpotente alors son indice de nilpotence est inférieur ou égal à  $n$ .  
Si  $f \in L(E)$  est nilpotent alors son indice de nilpotence est inférieur ou égal à  $\dim(E)$ .
- v) Un endomorphisme nilpotent ( une matrice nilpotente) est trigonalisable.

## 3 Sur la stabilité (cf Centrale 2015)

**Proposition 3** i) Une droite vectorielle est stable par  $f \iff$  elle est engendrée par un  $\vec{v}_f$  de  $f$ .

ii) Si  $g \in L(E)$  et  $f$  sont permutables tout sous-espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .

iii) Si  $F \neq \{0_E\}$  est un sous-espace stable par  $f$ , alors  $\chi_{f|_F} | \chi_f$ .

iv) Si  $F \neq \{0_E\}$  est un sous-espace stable par  $f$  diagonalisable (resp. trigonalisable) alors l'endomorphisme de  $F$  induit par  $f$  ( à savoir  $f|_F$ ) est diagonalisable (resp. trigonalisable).

## 4 Sur la similitude matricielle

**Proposition 4** Sont des invariants de similitude : i) Le spectre d'une matrice.

ii) Le polynôme caractéristique d'une matrice.

iii) Tout polynôme annulateur d'une matrice.

iv) Le caractère diagonalisable(trigonalisable) d'une matrice.

v) Les dimensions des espaces propres correspondant aux mêmes valeurs propres (cf i)).

**Remarque 5**  $\triangle!$  Deux matrices ayant même polynôme caractéristique ne sont pas nécessairement semblables. ( $0_2$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  admettent  $X^2$  comme polynôme caractéristique mais ne sont pas semblables par l'argument ( $\heartsuit$ ))

Notez toutefois que deux matrices **DIAGONALISABLES**, de même polynôme caractéristique, sont évidemment semblables ( car semblables à une même matrice diagonale).

## 5 Importance du corps des scalaires

Par le théorème fondamental de l'algèbre nous disposons des particularités suivantes **propres au champ complexe**.

**Proposition 5** Soient  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $f \in L(E)$ , où  $E$  espace vectoriel de dimension finie  $\geq 1$ .

i) Les spectres de  $A$  et  $f$  sont non vides.

ii)  $A$  possède au moins une colonne propre.

iii)  $f$  possède au moins un  $\vec{v}_f$  et donc au moins une droite vectorielle stable.

iv)  $A$  et  $f$  sont tz.

**Remarque 6**  $\triangle!$  Rien de tout ceci n'est en général vrai si on se place dans le corps des réels. Par exemple la matrice  $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  possède un spectre réel vide!

$\triangle!$  Il est donc quelquefois pertinent de considérer une matrice à coefficients réels comme une matrice à coefficients complexes pour bénéficier d'un contexte plus riche.

Terminons par une condition suffisante de non vacuité du spectre réel d'une matrice à coefficients réels ( et d'un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$  ev via une matrice le représentant) qui s'appuie sur une conséquence classique et aisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Tout polynôme à coefficients réels, de degré impair possède une racine réelle ( $\heartsuit$ ).

**Corollaire 1** Soient  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A \in M_{2p+1}(\mathbb{R})$ ,  $f \in L(E)$ , où  $E$   $\mathbb{R}$  ev tel que  $\dim(E) = 2p + 1$ .

i)  $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ . Donc  $A$  possède au moins une colonne propre réelle.

ii)  $Sp(f) \neq \emptyset$  donc  $f$  possède au moins un vecteur propre et au moins une droite vectorielle stable.

Enfin et à titre de **complément** ( 1) et 2) proviennent du cours de première année sur les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels, 3) se prouve en remarquant que  $X \in E_{\lambda}(A) \rightarrow \bar{X}$  est un isomorphisme de  $E_{\lambda}(A)$  sur  $E_{\bar{\lambda}}(A)$ .

**Proposition 6** Soient  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$  (i.e  $\lambda$  racine complexe de  $\chi_A$ ).

1)  $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$  et  $\bar{\lambda} \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ .

2)  $m(\bar{\lambda}) = m(\lambda)$ .

3)  $\dim E_{\bar{\lambda}}(A) = \dim E_{\lambda}(A)$ .

## 6 Preuves concernant le polynôme caractéristique

Commençons par un lemme qui se prouve (sans peine) par récurrence en utilisant un développement suivant une colonne pour la partie hérédité et qui stipule que :

**Lemme 1** Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$   $f_{ij}$  étant une fonction affine à coefficients dans  $\mathbb{K}$  alors  $\det((f_{ij}(\lambda))) \in \mathbb{K}_n[\lambda]$ .

De là on tire:

**Corollaire 2**  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ .

$\chi_A \in \mathbb{K}[X]$  et  $d^{\circ}(\chi_A) = n$  puis  $\chi_A(\lambda) = \lambda^n - \text{tr}(A)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$ .

**Preuve 2** On procède par récurrence sur la taille de la matrice (initialisation aisée) en supposant l'assertion dans son ensemble ( sauf ce qui concerne le terme constant) vérifiée à l'ordre  $n - 1$ .  $B$  désigne la matrice de  $M_{n-1}(\mathbb{K})$  obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de  $A$ . On développe  $\chi_A(\lambda)$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , suivant la première colonne, ce qui donne :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - a_{11})\chi_B(\lambda) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \Delta_i(\lambda),$$
 où  $\Delta_j(\lambda)$  est le déterminant d'ordre  $n - 1$  obtenu à partir de  $\chi_A(\lambda)$  en en supprimant la première colonne et la  $i$ -ième ligne.

Or en développant suivant la première ligne ( qui est à chaque fois indépendante de  $\lambda$ ) chacun de ces sous-déterminants se présente comme une CL de déterminants d'ordre  $n - 2$  auxquels on peut appliquer le lemme. Autrement dit chaque  $\Delta_j$  est un polynôme de degré  $\leq n - 2$  donc n'interfère pas dans la détermination des termes de degré  $n$  et  $n - 1$  de  $\chi_A$ . Il suffit alors d'appliquer (HR) à  $B$  pour conclure  $\square$

Maintenant que nous savons que  $\chi_A$  est un polynôme, son coefficient constant est aussi son évaluation en  $0 = \det(0I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$  (par propriété du déterminant)■

**Remarque 7** Pour finir je reviens sur mon objection ( rapidement donnée en classe) concernant une preuve de Cayley-Hamilton magique.

Nous disposons de l'égalité ( c'est la définition donnée) :  $\det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Pour toute matrice de  $M_n(K)$ , je peux considérer la matrice  $\chi_A(B)$  qui est un élément de  $\mathbb{K}[B]$ .

Si j'explicite  $\det(\lambda I_n - A)$  sous forme de tableau pour le calculer, il apparaît impossible de remplacer  $\lambda$  par  $B$  et même si je définis  $\phi : B \in M_n(K) \rightarrow \det(BI_n - A)$  et que  $\phi$  et  $\chi_A$  coïncident sur l'ensemble des matrices scalaires ( en identifiant celles-ci aux scalaires), elles ne peuvent coïncider ailleurs puisque l'une est valeurs scalaires et l'autre à valeurs matricielles  $\triangle!$ .