Feuille d'exercices 3
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$, donc f est paire. Elle n'est pas périodique.
- $\forall y \in \mathbb{R},\ g(-y) = \dfrac{2 \times (-y)}{1 + (-y)^2} = -\dfrac{2y}{1 + y^2} = -g(y)$, donc g est impaire. Elle n'est pas périodique.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) = h(x)$, donc h est paire.
  De plus : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x+\pi) = \sin^2(x+\pi) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) = h(x)$, donc h est π-périodique.
- $\forall t \in D,\ i(-t) = \dfrac{1}{\cos(-2t)} = \dfrac{1}{\cos(2t)} = i(t)$, donc i est paire.
  De plus : $\forall t \in \mathbb{R},\ i(t+\pi) = \dfrac{1}{\cos(2(t+\pi))} = \dfrac{1}{\cos(2t))} = i(t)$, donc i est π-périodique.

Exercice 2. Comme f_a est paire, la courbe de f a pour axe de symétrie l'axe $x = a$.
Comme f_b est impaire, la courbe de f a pour centre de symétrie le point $(b, 0)$.
Notons $\delta = b - a$. La courbe de f a alors pour axe de symétrie « inversé » l'axe $x = b + \delta$, puis pour centre de symétrie « inversé » le point $(b + 2\delta, 0)$, puis pour axe de symétrie « non inversé » l'axe $x = b + 3\delta$.
La fonction f est ainsi périodique de période $b + 3\delta - a = 4\delta = 4(b - a)$.

Exercice 3. La courbe de g est obtenu à partir de celle de f par dilatation de facteur -1 verticalement (c'est-à-dire par symétrie selon l'axe Ox) puis par translation de 2 unités verticalement.

Exercice 8. On procède par analyse-synthèse. Supposons qu'il existe f solution. On dérive selon x : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f'(x+y) = f'(x)$. Par conséquent, f' est constante, donc f est affine. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = ax + b$. Alors : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a(x+y) + b = ax + b + ay + b$, donc $2b = b$, donc $b = 0$. Donc f est linéaire.
Réciproquement, si f est linéaire, alors f est solution.

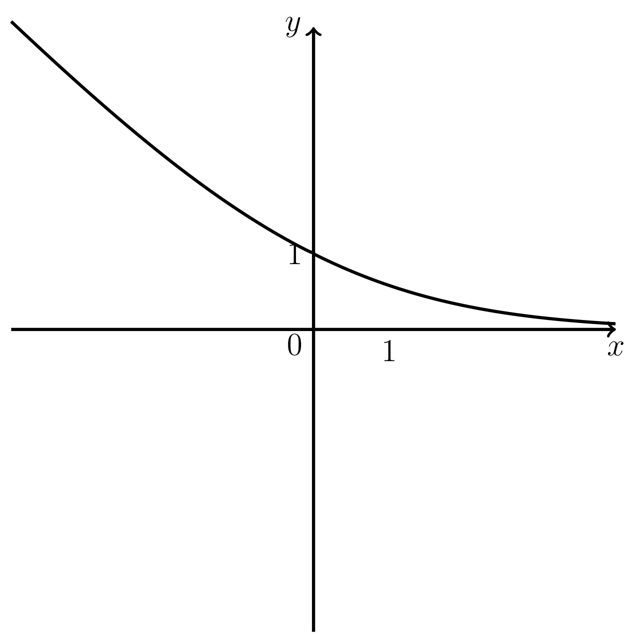
Exercice 9.
(a) Supposons f paire. Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$, donc, en dérivant : $-f'(-x) = f'(x)$, donc f' est impaire.
La réciproque est vraie : supposons f' impaire, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = -f'(x)$, donc $f(-x) = f(x) + c$.
En particulier, $f(0) = f(0) + c$, donc $c = 0$, donc f est paire.
(b) Supposons f impaire. Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$, donc, en dérivant : $-f'(-x) = -f'(x)$, donc f' est paire.
La réciproque est fausse, par exemple pour $f : x \mapsto x^3 + 1$: f' est paire, mais f n'est pas impaire.
(c) À nouveau : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$, donc, en dérivant : $f'(x+T) = f'(x)$, donc f' est T-périodique.

Exercice 10.
- $D_i = D_i' = \mathbb{R}$. $\forall x \in D_i',\ i'(x) = -\dfrac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 3x + 1)^2}$.
- $D_j = D_j' = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. $\forall x \in D_j',\ j(x) = x - 2$ donc $j'(x) = 1$.
- $D_k = D_k' = \left]\dfrac{1}{5}, +\infty\right[$. $\forall x \in D_k',\ k'(x) = -\dfrac{5}{5x - 1}$.
- $D_l = D_l' = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$. $\forall x \in D_l',\ l'(x) = \dfrac{3\cos(x)\cos(2x) + 6\sin(x)\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$.

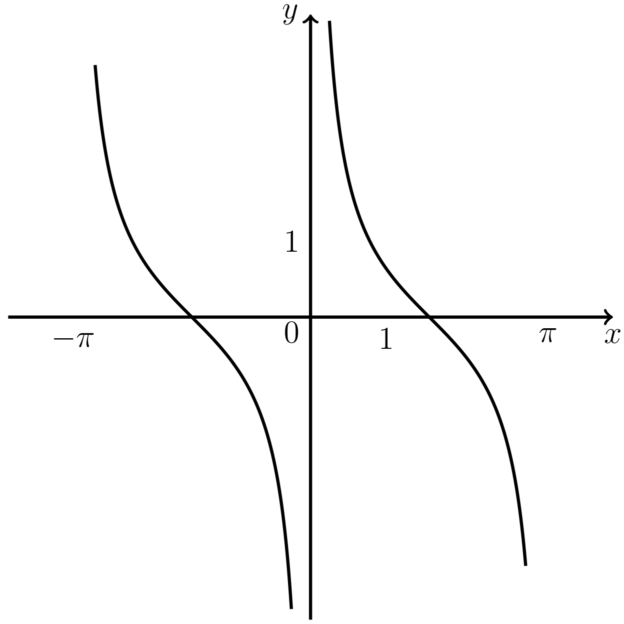
- $D_m = \mathbb{R}$, $D'_m = \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$. $\forall x \in D'_m,\ m'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{|x^2-3x+2|}}$ si $x \in]1,2[$, $\dfrac{-2x+3}{2\sqrt{|x^2-3x+2|}}$ sinon.
- $D_n = D'_n = \mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in D'_n,\ n'(x) = (1+\ln(x))\, x^x$.
- $D_p = [0,2[$, $D'_p =]0,2[$. $\forall x \in D'_p,\ p'(x) = \dfrac{\frac{2-2x}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} = \dfrac{(1-x)}{\sqrt{x}(2-x)^{\frac{3}{2}}}$.
- $D_q = D'_q = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. $\forall x \in D'_q,\ q'(x) = \left(\tan(x) + \dfrac{x}{\cos^2(x)}\right) e^{x \tan x}$.
- $D_r = D'_r =]0,e[\cup]e,+\infty[$. $\forall x \in D'_r,\ r'(x) = \dfrac{2xe^{x^2}(\ln(x)-1) - \frac{e^{x^2}}{x}}{(\ln(x)-1)^2} = \dfrac{2x^2e^{x^2}(\ln(x)-1) - e^{x^2}}{x(\ln(x)-1)^2}$.

Exercice 11.

- $D_h = D'_h = \mathbb{R}^*$. $\forall x \in D'_h,\ h'(x) = \dfrac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2}$.
  On pose $g : x \mapsto (1-x)e^x - 1$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -xe^x \leq 0$ si $x \geq 0$, ≥ 0 si $x \leq 0$. Donc g admet un maximum en 0 égal à $g(0) = 0$, donc g est négative sur $\mathbb{R}$.
  Donc : $\forall x \in D'_h,\ h'(x) \leq 0$. Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$, donc h est prolongeable par continuité en 0 par $h(0) = 1$; donc h est décroissante sur $\mathbb{R}$. Enfin : $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.



- Notons $f = \text{cotan}$. $D_f = D'_f = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Comme f est π-périodique, on l'étudie sur $]0,\pi[$. $\forall x \in]0,\pi[,\ f'(x) = \dfrac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} < 0$, donc f est décroissante sur $]0,\pi[$. On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty$.



Exercice 13.

(a) Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. La fonction f est définie sur $]-1,+\infty[$ et dérivable deux fois sur le même intervalle. On a : $\forall x > -1,\ f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$, donc f est concave, donc est en-dessous de sa tangente en 0, à savoir la droite d'équation cartésienne $y = f'(0)(x-0)+f(0) = x$. Donc : $\forall x > -1,\ f(x) \leq x$.

(b) On applique la formule précédente à $x = \pm\dfrac{a}{n} > -1$: $\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) \leq \dfrac{a}{n}$, donc $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \leq e^a$, et de même $\ln\left(1-\dfrac{a}{n}\right) \leq -\dfrac{a}{n}$, donc $e^a \leq \left(1-\dfrac{a}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 14.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3}{4}\sin(x) - \dfrac{1}{4}\sin(3x)$, donc $f^{(n)}(x) = \dfrac{3}{4}\sin^{(n)}(x) - \dfrac{3^n}{4}\sin^{(n)}(3x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = (n-1)x^{n-2}\ln(x) + x^{n-2}$,
  $g^{(2)}(x) = (n-1)(n-2)x^{n-3}\ln(x) + (2n-3)x^{n-3}$,
  et plus généralement : $\forall k \leq n-1,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g^{(k)}(x) = a_k x^{n-1-k}\ln(x) + b_k x^{n-1-k}$, avec : $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, et : $a_{k+1} = (n-1-k)a_k$ et $b_{k+1} = a_k + (n-1-k)b_k$.
  On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$, puis : $\forall k \geq n,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g^{(k)}(x) = (-1)^{k-n}\dfrac{(n-1)!(k-n)!}{x^{k-n+1}}$.

Exercice 16. Montrer que la fonction $x \mapsto x + \sin(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $f : x \mapsto x+\sin(x)$ est usuellement dérivable sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1+\cos(x) \geq 0, = 0$ sur $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Donc f' est strictement positive, sauf en des points isolés, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus f est continue (car dérivable), donc, d'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice 18.

(a) Le nombre $f(x)$ est défini lorsque $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} > 0$, c'est-à-dire ($e^x+1 > 0$ et $e^x - 1 > 0$) ou ($e^x+1 < 0$ et $e^x - 1 < 0$), c'est-à-dire ($x > 0$) ou (impossible). Donc $D_f = \mathbb{R}_+^*$.
Par un calcul direct : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(f(x)) = \ln\left(\dfrac{\frac{e^x+1}{e^x-1}+1}{\frac{e^x+1}{e^x-1}-1}\right) = \ln\left(\dfrac{2e^x}{2}\right) = x$, donc $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$.

(b) Comme $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$, f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque $f^{-1} = f$: la fonction f est une *involution*.

Exercice 20. Soit $f : E \to F$ une fonction impaire et bijective. Montrer que f^{-1} est impaire. A-t-on un énoncé analogue pour une fonction paire ? Soit $y \in F$, soit $x = f^{-1}(y)$. Alors $y = f(x)$, donc $f(-x) = -f(x) = -y$, donc $-x = f^{(-1)}(-y)$, donc $f^{(-1)}(-y) = -f^{-1}(y)$. Donc $f^{(-1)}$ est impaire.
Dans le cas où f est paire, on a : $\forall x \in E,\ f(-x) = f(x)$, donc, comme f est injective, $x = -x$, donc $x = 0$, donc $E = \{0\}$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $f : \{0\} \to \{c\}$ (f est donc définie par $f(0) = c$). Sa réciproque (définie par $f^{(-1)}(c) = 0$) est alors impaire si et seulement si $c = 0$.