

Devoir surveillé n° 1

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) Faux : pour $x = \frac{1}{2}$, $x^2 = \frac{1}{4} < x = \frac{1}{2}$.

La négation de l'assertion s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < x$.

- (b) Vrai : soit $x > 0$. Alors $y = \frac{x}{2}$ convient, car $y > 0$ et $y < x$.

- (c) Vrai : soit $n \in \mathbb{N}$. On procède par disjonction de cas :

- si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $n(n+1) = 2k(2k+1)$, donc $p = k(2k+1)$ convient.
- si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Donc $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$. Donc $p = (k+1)(2k+1)$ convient.

Dans tous les cas, l'assertion $(\exists p \in \mathbb{N}, n(n+1) = 2p)$ est vérifiée.

- (d) Vrai : soient $x < 0$ et $y > 0$. Alors $x < y$, donc l'implication $x \geq y \Rightarrow x \geq 2y$ est vérifiée.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, respectivement :

- (a)

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 10 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 11 \\ &\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{11} \text{ ou } x-1 = -\sqrt{11} \\ &\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{11} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{11}. \end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions est donc $S = \{1 - \sqrt{11}, 1 + \sqrt{11}\}$.

- (b)

$$\begin{aligned} 2x^2 - 11x + 12 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 - \frac{121}{16} + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \\ &\Leftrightarrow x - \frac{11}{4} = \frac{5}{4} \text{ ou } x - \frac{11}{4} = -\frac{5}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{16}{4} = 4 \text{ ou } x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions est donc $S = \left\{\frac{3}{2}, 4\right\}$.

(c) Comme $|2x - 1| = 2x - 1$ si $x \geq \frac{1}{2}$, $1 - 2x$ si $x \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} |2x - 1| \leq 3x + 1 &\Leftrightarrow \left(2x - 1 \leq 3x + 1 \text{ et } x \geq \frac{1}{2} \right) \text{ ou } \left(1 - 2x \leq 3x + 1 \text{ et } x \leq \frac{1}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(x \geq -2 \text{ et } x \geq \frac{1}{2} \right) \text{ ou } \left(x \geq 0 \text{ et } x \leq \frac{1}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(x \geq \frac{1}{2} \right) \text{ ou } \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow x \geq 0. \end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions est donc $S = \mathbb{R}_+$.

(d) Cette équation est définie lorsque $3x + 5 \geq 0$ et $2x - 3 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -\frac{5}{3}$ et $x \geq \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $x \geq \frac{3}{2}$. Le domaine de définition de l'équation est donc $D = \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in D, \sqrt{3x + 5} \leq \sqrt{2x - 3} &\Leftrightarrow 3x + 5 \leq 2x - 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq -8. \end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions est donc $S =]-\infty, -8] \cap D = \emptyset$.

Exercice 2.

1. (a) Lorsque $y = 0$, (E) s'écrit directement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x - f(0)) = 1 - x$.
 (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $x = t + f(0)$, alors :

$$f(t) = f(t + f(0) - f(0)) = f(x - f(0)) = 1 - x = 1 - (t + f(0)) = 1 - t - f(0).$$

(c) Poser $\alpha = 1 - f(0)$ convient.

2. (a) On a directement :

$$f(x - f(y)) = f(x - (-y + \alpha)) = -(x + y - \alpha) + \alpha = -x - y + 2\alpha.$$

(b) On a : $(E) \Leftrightarrow 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.

(c) On a montré que, parmi les candidats à être solution de (E) de la forme $f : t \mapsto -t + \alpha$, seule la valeur $\alpha = \frac{1}{2}$ convient. L'équation (E) admet donc une et une seule solution, qui est la fonction $f : t \mapsto -t + \frac{1}{2}$. L'ensemble S des solutions de (E) est donc :

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & t & \mapsto -t + \frac{1}{2} \end{array} \right\}.$$

Nous venons d'effectuer un raisonnement par analyse-synthèse.

Exercice 3.

1. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k = \sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Pour $k = 1$: d'une part, $\sum_{j=1}^1 j^2 = 1^2 = 1$; d'autre part, $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$, donc P_1 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons P_k vraie, montrons P_{k+1} :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} j^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1) \frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Donc P_{k+1} est vraie, donc P_k est héréditaire.

Donc, par récurrence, P_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. On a $S = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n k^3 + 3k^2 + k = \frac{1}{3}C + \frac{1}{2}B + \frac{1}{6}A$ par linéarité.

3. On a $S = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} j^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n j^2 = \sum_{j=1}^n (n-j+1)j^2 = \sum_{j=1}^n (n+1)j^2 - j^3 = (n+1)B - C$.

4. D'après les questions précédentes, $\frac{1}{3}C + \frac{1}{2}B + \frac{1}{6}A = (n+1)B - C$, donc :

$$\begin{aligned} C &= \frac{3}{4} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) B - \frac{1}{6} A \right) \\ &= \frac{2n+1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{8} - \frac{n(n+1)}{16} \\ &= \frac{n(n+1)}{16} ((2n+1)^2 - 1) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) &= \sum_{l=2}^{n+1} l(l-1)(l+1) \quad \text{en posant } l = k+1 \\ &= \sum_{l=2}^{n+1} l^3 - l \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \frac{n^2+3n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 4.

1. (a) On a : $\mathcal{A} = \left\{ \frac{2p+1}{2q} \mid (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}.$

(b) Soit $x \in \mathcal{A}$. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{2p+1}{2q}.$

On raisonne par l'absurde : supposons que $x \in \mathbb{Z}$. Alors $2p+1 = 2qx$. Dans cette égalité, $2p+1$ est un entier impair et $2qx$ est un entier pair, ce qui est absurde. Donc $x \notin \mathbb{Z}$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ ne contient donc aucun entier.

2. Supposons que $S_n \in \mathcal{A}$, et montrons que $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = \frac{2p+1}{2q}.$

Soit, d'autre part, $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2r.$

Alors :

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1} = \frac{2p+1}{2q} + \frac{1}{2r+1} = \frac{(2p+1)(2r+1) + 2q}{2q(2r+1)},$$

donc $S_{n+1} = \frac{2p'+1}{2q'}$ avec $p' = 2pr + p + q + r$ et $q' = q(2r+1)$. Donc $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.

On a bien montré que, si $S_n \in \mathcal{A}$, alors $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.

3. Notons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P(m)$ l'assertion « il existe $p_m, q_m \in \mathbb{N}$ tels que $I_m = \frac{p_m}{2q_m+1}$ ».

Pour $m = 0$, on a $I_0 = 1 = \frac{1}{2 \times 0 + 1}$, donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$ conviennent.

Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons $P(m)$ vraie, et montrons $P(m+1)$.

Par hypothèse de récurrence, il existe $p_m, q_m \in \mathbb{N}$ tels que $I_m = \frac{p_m}{2q_m+1}$. Alors :

$$I_{m+1} = I_m + \frac{1}{2m+3} = \frac{p_m}{2q_m+1} + \frac{1}{2m+3} = \frac{p_m(2m+3) + (2q_m+1)}{(2q_m+1)(2m+3)},$$

donc $p_{m+1} = p_m(2m+3) + (2q_m+1)$ et $q_{m+1} = 2mq_m + 3q_m + m + 1$ conviennent.

Donc $P(m+1)$ est vraie. On a montré : $\forall m \in \mathbb{N}, P(m) \Rightarrow P(m+1)$.

Comme $P(0)$ est vraie et que : $\forall m \in \mathbb{N}, P(m) \Rightarrow P(m+1)$, d'après le principe de récurrence, $P(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

4. (a) On a directement :

$$\frac{1}{2}S_{m+1} + I_m = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{2m+2} \frac{1}{k} + \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{2m+2} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2m+2} \frac{1}{k} = S_{2m+2}.$$

(b) Supposons que $S_{m+1} \in \mathcal{A}$, et montrons que $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $S_{m+1} = \frac{2p+1}{2q}.$

Soit, d'autre part, $(p_m, q_m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $I_m = \frac{p_m}{2q_m+1}.$

Alors, d'après la question précédente :

$$S_{n+1} = S_{2m+2} = \frac{1}{2} \frac{2p+1}{2q} + \frac{p_m}{2q_m+1} = \frac{(2p+1)(2q_m+1) + 4qp_m}{4q(2q_m+1)},$$

donc $S_{n+1} = \frac{2p'+1}{2q'}$, avec $p' = 2pq_m + p + q_m + 2qp_m$ et $q' = 2q(2q_m+1)$. Donc $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.

On a bien montré que, si $S_{m+1} \in \mathcal{A}$, alors $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.

5. Notons, pour tout $n \geq 2$, $P(n)$ l'assertion « $S_n \in \mathcal{A}$ ».

Pour $n = 2$, on a $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \in \mathcal{A}$, donc $P(2)$ est vraie.

Soit $n \geq 2$. Supposons $P(2), P(3), \dots, P(n)$ vraies, et montrons $P(n+1)$.

On procède par disjonction de cas :

- Si n est pair, alors, d'après la question 2, comme $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie,
- Si n est impair : posons $n = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse de récurrence, $P(m+1)$ est vraie (car $2 \leq m+1 = n-m \leq n$), donc, d'après la question 4b, $P(n+1)$ est vraie.

Dans tous les cas, $P(n+1)$ est vraie. On a montré : $\forall n \geq 2, (P(2) \wedge P(3) \wedge \dots \wedge P(n)) \Rightarrow P(n+1)$.

Comme $P(2)$ est vraie et que : $\forall n \geq 2, (P(2) \wedge P(3) \wedge \dots \wedge P(n)) \Rightarrow P(n+1)$, par récurrence forte, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

On a donc : $\forall n \geq 2, S_n \in \mathcal{A}$; donc, d'après la question 1b : $\forall n \geq 2, S_n \notin \mathbb{N}$.