

Devoir surveillé n° 1

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

Les résultats doivent être encadrés.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.

Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (6 points)

1. Parmi les assertions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses, en le démontrant. On énoncera la négation des assertions fausses.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$,

(b) $\forall x > 0, \exists y > 0, y < x$,

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n(n+1) = 2p$

On raisonnera par disjonction de cas sur n ,

(d) $\forall x < 0, \forall y > 0, x \geq y \Rightarrow x \geq 2y$.

2. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x . On déterminera précisément, à chaque fois, l'ensemble S des solutions de l'équation.

(a) $x^2 - 2x - 10 = 0$,

(b) $2x^2 - 11x + 12 = 0$,

(c) $|2x - 1| \leq 3x + 1$,

(d) $\sqrt{3x + 5} \leq \sqrt{2x - 3}$.

Exercice 2. (6 points) On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x - f(y)) = 1 - x - y. \quad (E)$$

1. On suppose qu'il existe une fonction vérifiant (E), et on note f une telle fonction.

(a) Écrire l'équation (E) lorsque $y = 0$.

(b) En déduire que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 1 - t - f(0)$.

(c) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = -t + \alpha$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note à présent f la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = -t + \alpha$.

(a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer $f(x - f(y))$.

(b) À quelle condition sur α la fonction f vérifie-t-elle l'équation (E) ?

3. En déduire l'ensemble des fonctions recherchées. Comment s'appelle le type de raisonnement utilisé ?

Exercice 3. (8 points) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note $S = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k j^2 \right)$.

On note de plus $A = \sum_{k=1}^n k$, $B = \sum_{k=1}^n k^2$ et $C = \sum_{k=1}^n k^3$.

1. Montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.
2. En déduire que : $S = \frac{1}{3}C + \frac{1}{2}B + \frac{1}{6}A$.
3. Intervertir les sommes dans S . En déduire que $S = (n+1)B - C$.
4. Déduire des questions précédentes la formule : $C = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
5. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$.

Indication : On pourra utiliser le changement de variables $l = k + 1$.

Exercice 4. (8 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout $n \geq 2$, S_n n'est pas un entier.

Pour cela, on va montrer que, lorsque $n \geq 2$, S_n s'écrit comme le rapport d'un entier impair sur un entier pair.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des réels qui s'écrivent comme le quotient d'un entier impair sur un entier pair.

1. (a) Traduire cette définition de $\mathcal{A}$ avec des notations ensemblistes ($\mathcal{A} = \{ \dots \}$).
(b) Vérifier que cet ensemble ne contient aucun entier.
2. Soit $n \geq 2$ un entier pair. Montrer que si $S_n \in \mathcal{A}$, alors $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.
3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note I_m la somme des inverses des entiers impairs jusqu'à $2m+1$:

$$I_m = \sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m+1}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $p_m, q_m \in \mathbb{N}$ tels que $I_m = \frac{p_m}{2q_m+1}$.

4. Soit $n \geq 3$ un entier impair. On pose $n = 2m+1$, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
(a) Montrer que l'on a : $S_{2m+2} = \frac{1}{2}S_{m+1} + I_m$.
(b) Déduire des questions précédentes que, si $S_{m+1} \in \mathcal{A}$, alors $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.
5. À l'aide d'une récurrence forte, déduire de toutes les questions précédentes que, pour tout $n \geq 2$, $S_n \notin \mathbb{N}$.