

TD. A4

Calculs de limites

Exercices de cours

- ① Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$$

- Démontrer que (u_n) est bien définie.
- Démontrer que (u_n) est majorée et croissante.
- Démontrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.
- On suppose maintenant que $u_0 = 4$.
Démontrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

- ② Démontrer l'équivalence :

$$1 - \cos u \sim_0 \frac{u^2}{2}$$

- ③ Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

- ④ Calculer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^3}{4x^2-2x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\sqrt{x}+5}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \ln x}{\sqrt{x} + \ln x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^5-1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{3x^5-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{(x-1)}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{6})}{\sin(5x + \frac{\pi}{6})}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

- ⑤ Étudier le comportement à l'infini des suites suivantes.

$$a_n = \frac{5^n - 6^n}{5^n - 4^n}$$

$$b_n = \frac{4^n}{n^3 - n!}$$

$$c_n = \frac{n - 2^n}{e^n}$$

$$d_n = n(\ln(n+2) - \ln n)$$

$$e_n = (2n)^{\sin \frac{1}{n}}$$

$$f_n = n(\sqrt[n]{2} - 1)$$

$$g_n = \sqrt[n]{3 + \sin n}$$

$$h_n = \frac{n! \ln n}{\sqrt{n} e^n}$$

Travaux dirigés

- ① Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{4}\}$ par :

$$f(x) = \frac{5x-1}{4x+1}.$$

- Étudier les variations de f .
- Démontrer que (u_n) est bien définie et incluse dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.
- Démontrer que (u_n) converge et calculer sa limite.
- Soit maintenant v_n la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}.$$

Démontrer que v_n est bien définie et exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

- En déduire le terme général de la suite (u_n) .
Démontrer de nouveau qu'elle converge et retrouver sa limite.
- Donner un équivalent de $u_n - \ell$, où $\ell = \lim u_n$.

- ② On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \frac{6}{un}$.

On pose $f(x) = 1 + \frac{6}{x}$.

- Justifier que l'intervalle $I = [u_0, u_1]$ est stable par f , et en déduire que la suite (u_n) est bien définie et bornée.
- Décrire les variations de la suite (u_n) .
- Décrire les variations de $g = f \circ f$.

En déduire que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

- Démontrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

- ③ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par une valeur $u_0 \geq 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 7u_n}{2}} - 1$$

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 + 7x}{2}} - 1$ et $g : x \mapsto f(x) - x$.

- Décrire les variations de f et de g sur $\mathbb{R}_+^*$, et résoudre l'équation $g(x) = 0$.
- Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, convergente, et donner sa limite.
- Que peut-on dire si $u_0 \in [0, 1[$?

4 Étudier les limites des suites suivantes.

a. $u_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n \quad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

b. $u_n = \frac{a}{n} \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor \quad v_n = \frac{n}{a} \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor \quad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

c. $u_n = \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\ln n}}$ d. $u_n = \sqrt[n]{1 + \cos^2 n}$

e. $u_n = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{n^2-3} \right\rfloor$ f. $u_n = \sin n \sin \frac{1}{n}$

g. $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n - \sqrt{n^2-1}}$ h. $u_n = \sqrt[n]{2^n - 1}$

i. $u_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$ j. $u_n = \frac{n!}{\pi^n \ln n}$

k. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k+n^2}$ l. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+n}{k^2+n^3}$

m. $u_n = \tan \frac{\pi}{n} \tan \frac{n\pi}{2n+1}$ n. $u_n = e^{2i\pi\sqrt{n^2+1}}$

5 Donner une suite la plus simple possible équivalente à chacune des suites suivantes.

a. $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$ b. $u_n = e^{\frac{1}{n}}$

c. $u_n = n \sin \frac{\sqrt{n}}{(n+2)^2}$ d. $u_n = \sin \left(n + \frac{1}{n} \right) \pi$

e. $u_n = \ln(n+7) - \ln(n+3)$

f. $u_n = \tan \frac{n\pi-1}{2n}$ g. $u_n = \ln(2n^3+5)$

h. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$ i. $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+3}$

j. $u_n = \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}$ k. $u_n = \sqrt[n]{n^4+1} - n$

l. $u_n = \binom{n+k}{k}$ avec $k \in \mathbb{N}$

6 Soit $a \in \mathbb{R}$, et f et g deux fonctions définies au voisinage de a .

a. Démontrer que :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff f \underset{(0)}{=} g + o(g).$$

b. En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \tan 9x}{\tan x + \tan 4x}$$

7 On adopte la notation $f(x) \underset{a}{\ll} g(x)$ pour signifier $f(x) \underset{(a)}{=} o(g(x))$.

Ordonner les fonctions suivantes.

a. $x, x^2, \sqrt{x}, \ln x, x \ln x, x \ln^2 x, \frac{x}{\ln x}$ en $+\infty$.

b. $x, x^2, \sqrt{x}, x \ln x, x \ln^2 x, x^2 \ln x, \frac{x}{\ln x}$ en 0.

c. $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \ln x, \frac{1}{x \ln x}, \frac{\ln x}{x}$ en 0.

d. $n^5, n!, n!!, e^n, e^{n!}, 2^n, e^{\sqrt{n}}, \frac{e^n}{n^2}, n^3 e^n$ en $+\infty$.

8 Calculer les limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin \sqrt{x}) \ln 2x$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\ln(x+1)}$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x \ln^2 x$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{\sin x}$ f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$

g. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 3x}{\cos \frac{x}{4}}$ h. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{a^{x^2}} \quad (a > 1)$

i. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan 6x}{\cos(x + \frac{\pi}{3})}$ j. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

9 Donner des équivalents simples de chacune des fonctions suivantes au point a indiqué.

a. $f(x) = \frac{(2x+3)^4}{(x-1)^2}$ en $a = 0, a = 1, a = +\infty$

b. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^3}$ en $a = 0$

c. $f(x) = \frac{e^{\sin x} - 1}{\cos x - 1}$ en $a = 0$

d. $f(x) = \frac{\sin(nx) \cos(mx)}{\tan x}$ en $a = 0$
avec $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$

e. $f(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^3}$ en $a = 0$ et $a = +\infty$

f. $f(x) = x^{\sin x} - 1$ en $a = 0^+$

g. $g(x) = \cos \sqrt{x} - 1$ en $a = 0^+$

h. $h(x) = x^{\sin x} - \cos \sqrt{x}$ en $a = 0^+$

i. $f(x) = \tan x$ en $a = \frac{\pi}{2}$