

Chapitre A4

Calculs de limites

I. Suites récurrentes

A. Quelques théorèmes

Théorème d'encadrement

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ , alors la suite (v_n) converge aussi vers ℓ .

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

Si les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite alors la suite (u_n) converge vers cette limite.

Remarque. Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des *suites extraites* de la suite (u_n) :

$$(u_{2n}) = (u_0, u_2, u_4, \dots) \quad (u_{2n+1}) = (u_1, u_3, u_5, \dots)$$

Théorème de la limite monotone

Toute suite monotone admet une limite. Plus précisément :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante.

- Si (u_n) est majorée alors elle est convergente.
- Si (u_n) n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante.

- Si (u_n) est minorée alors elle est convergente.
- Si (u_n) n'est pas minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Dans la suite on note D une partie de $\mathbb{R}$.

Théorème (composition de limites)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, (u_n) une suite incluse dans D . Soit a et ℓ deux éléments de $\bar{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Corollaire

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est a un point de D . Alors :

$$\begin{array}{lll} \text{Si} & u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a & \text{et} \quad f \text{ est continue en } a \\ \text{alors} & f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a) & \end{array}$$

Contre-exemple 1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\lfloor \frac{n}{n+1} \right\rfloor$.

Démonstration. Si f est continue en a alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$. On applique le théorème précédent. $\square$

B. Applications aux suites récurrentes**Définition**

Une suite *récurrente* est une suite définie par la donnée de son premier terme et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout n , où f est une fonction.

Cette fonction est appelée l'*itératrice* de la suite.

Méthode

- L'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ doit être justifiée si la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. On cherche une partie stable par f .
- L'étude de la fonction f permet de prévoir le comportement de la suite (u_n) .
On trace la courbe de f ainsi que la première bissectrice des axes. On peut alors représenter les premiers termes de la suite.
- Si la fonction f est croissante alors la suite (u_n) est monotone. On applique le théorème de la limite monotone.
- Si la suite (u_n) converge et f est continue alors la limite de (u_n) est un point fixe de f .

1. Existence de la suite

Exemple 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{6}{1+u_n}$. Justifier que cette suite est bien définie.

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Une partie de I de D est *stable par f* si : $\forall x \in I \quad f(x) \in I$

Proposition

Si I est stable par f et $u_0 \in I$ alors la suite (u_n) est bien définie et incluse dans I :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in I \quad \text{ou} \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$$

2. Variations

Proposition

Si la fonction f est croissante alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
Son sens de variation est déterminé par ses deux premiers termes.

Démonstration.

Remarque. Si la fonction f est décroissante alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni croissante ni décroissante.

3. Limite

Proposition

On suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que f est continue.
Alors ℓ est un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$.

Démonstration.

Exemple 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{5}$

- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 5$
- Étudier les variations de la suite (u_n) .
Démontrer qu'elle converge et déterminer sa limite.
- Que dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_0 = 6$?

► **Exercice 1.**

II. Relations de comparaison

A. Cas des suites

1. Négligeabilité

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites, (v_n) ne s'annulant pas. On dit que u_n est *négligeable* devant v_n si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors :

$$u_n = o(v_n) \quad \text{ou} \quad u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$$

Exemple 4. Comparaison des suites (n) et (n^2) , puis $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Propositions

Soit (u_n) , (v_n) , (w_n) trois suites.

- Si (u_n) et (v_n) sont négligeables devant (w_n) alors $(u_n + v_n)$ est négligeable devant (w_n) .
- Si (u_n) est négligeable devant (v_n) et (v_n) est négligeable devant (w_n) alors (u_n) est négligeable devant (w_n) .
- Si (u_n) est négligeable devant (v_n) , et si (v_n) tend vers une limite finie ℓ , alors (u_n) tend vers 0.

Démonstration. Laissées en exercice. □

2. Équivalence

Définition

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, (v_n) ne s'annulant pas. On dit que (u_n) est *équivalente* à (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note alors :

$$u_n \sim v_n \quad \text{ou} \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$$

Exemple 5. $(n^2 + 3n - 1)$ est équivalente à (n^2) .

Remarque. Si (u_n) est équivalente à (v_n) alors (v_n) est équivalente à (u_n) . On peut donc dire que (u_n) et (v_n) sont équivalentes.

Propositions

Soit (u_n) , (v_n) , (w_n) trois suites.

- (i) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
- (ii) Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) tend vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors (u_n) tend vers ℓ .
- (iii) Si (v_n) est négligeable devant (u_n) , alors $(u_n + v_n)$ est équivalente à (u_n) .

Exemple. $n^2 + 5n \sim n^2$ car $5n = o(n^2)$

Remarque. Une suite polynomiale $u_n = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \cdots + a_pn^p$ (où $a_p \neq 0$) est équivalente à son terme de plus haut degré :

$$u_n \sim a_p n^p$$

Démonstration.

Proposition

Soit (u_n) , (v_n) , (u'_n) , (v'_n) quatre suites.

$$\text{Si } u_n \sim u'_n \quad \text{et} \quad v_n \sim v'_n \quad \text{alors} \quad u_n v_n \sim u'_n v'_n \quad \text{et} \quad \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$$

Démonstration. Laissée en exercice. □

Exemple.

$$\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 + 5}$$

Remarque. La relation d'équivalence est compatible avec les produits et les quotients. Par contre elle ne l'est pas avec les sommes.

Attention

On ne peut pas ajouter d'équivalences.

Contre-exemple. $n^2 + n \sim n^2 + 1$ et $1 - n^2 \sim -n^2$

Proposition

Soit α un réel. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Démonstration. Laissée en exercice. □

Attention

On ne peut pas appliquer une fonction à une équivalence.

Contre-exemple. $n + 1 \sim n$ mais $e^{n+1} \not\sim e^n$.

Définition

$$u_n = O(v_n) \quad \text{ou} \quad u_n = O_{+\infty}(v_n)$$

Proposition

- Si (u_n) et (v_n) sont dominées par (w_n) alors $(u_n + v_n)$ est dominée par (w_n) .
- Si (u_n) est dominée par (v_n) et (v_n) est dominée par (w_n) alors (u_n) est dominée par (w_n) .

- La somme de deux suites bornées est bornée.
- Le produit de deux suites bornées est borné. □

Résumé

B. Cas des fonctions

Définition

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

On dit qu'une propriété de f est vraie *au voisinage de a* si elle est vraie :

- sur un intervalle de la forme $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$ si $a \in \mathbb{R}$
- sur un intervalle de la forme $[B, +\infty[$ où $B \in \mathbb{R}$ si $a = +\infty$
- sur un intervalle de la forme $]-\infty, B]$ où $B \in \mathbb{R}$ si $a = -\infty$.

Définition

Soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g est non-nulle au voisinage de a . On dit que :

- f est *négligeable* devant g en a si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$
- f est *équivalente* à g en a si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$
- f est *dominée* par g en a si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

On note dans ces trois situations respectivement :

$$f(x) \underset{(x \rightarrow a)}{=} o(g(x)) \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \quad f(x) \underset{(x \rightarrow a)}{=} O(g(x))$$

ou juste $f \underset{(a)}{=} o(g) \quad f \underset{(a)}{\sim} g \quad f \underset{(a)}{=} O(g)$

ou encore $f = o_a(g) \quad f \underset{a}{\sim} g \quad f = O_a(g)$

Exemples.

$$(i) \quad x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^5) \quad \text{et} \quad x^5 \underset{(0)}{=} o(x^2)$$

$$(ii) \quad \ln x \underset{+\infty}{=} o(x) \quad \text{et} \quad \ln x \underset{(0)}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(iii) \quad \sin x \underset{0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \sin x \underset{+\infty}{=} O(1)$$

$$(iv) \quad \text{Si } f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \quad \text{alors} \quad f(x) \underset{+\infty}{=} O(x^n).$$

Remarques. Les propriétés des relations de comparaison pour les suites restent vraies pour les fonctions. Par exemple :

- Si $f \underset{(a)}{=} o(g)$ et $g \underset{(a)}{=} o(h)$ alors $f \underset{(a)}{=} o(h)$.
- La relation $\underset{a}{\sim}$ est compatible au produit et au quotient mais pas à la somme.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.
- $f \underset{(a)}{=} o(g)$ si et seulement si $f + g \underset{a}{\sim} g$.

Cette dernière propriété est utilisée pour les développements limités :

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \iff \sin x \underset{(0)}{=} x + o(x)$$

Théorème - Croissances comparées

Soit α et β deux réels strictement positifs et a un réel.

- (i) $\ln^\beta x = o(x^\alpha)$ en $+\infty$
- (ii) $\ln^\beta x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ en 0
- (iii) Si $a > 1$ alors $x^\alpha = o(a^x)$ en $+\infty$ et $a^x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ en $-\infty$
- (iv) Si $|a| < 1$ alors $a^x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ en $+\infty$
- (v) $a^n = o(n!)$

Démonstration. Les points (i) à (iv) sont conséquences du théorème des croissances comparées déjà énoncé.



C. Équivalents usuels

Théorème - Équivalences usuelles

$$\sin u \underset{0}{\sim} u \qquad e^u - 1 \underset{0}{\sim} u \qquad \ln(1 + u) \underset{0}{\sim} u$$

Corollaire

$$1 - \cos u \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2} \qquad \tan u \underset{0}{\sim} u \qquad \ln x \underset{1}{\sim} (x - 1)$$

► **Exercices 2, 3.**

Exemple 7. Calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{llll} (i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{x^3 + 3x^2} & (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 3}{2x^2 + 5} & (iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\ln x - e^x} & (iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{\tan 5x} \\ (v) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + e^x}{x^3 - e^{-x}} & (vi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1 + x^2}}{\ln \sqrt[3]{1 + x^3}} & (vii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}} & (viii) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\cos 6x} \\ (ix) \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \tan \frac{\pi}{2^n} & (x) \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n - n^2 4^n & (xi) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{où } x \in \mathbb{R} \text{ est fixé.} \end{array}$$

Méthode : Limites en un point non-nul

- Pour étudier une limite en un réel a non-nul on peut se ramener à 0 en posant $h = x - a$.
- Pour étudier une limite en $\pm\infty$ on utilise les croissances comparées.
Parfois on se ramène à 0 en posant $h = \frac{1}{x}$.

► **Exercices 4, 5.**

Exemple 8. Donner une équivalent simple de :

$$u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) \qquad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad w_n = \ln \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

Un *équivalent simple* d'une suite ou d'une fonction et un équivalent de la forme λn^α , λa^n , $\lambda \ln n$, etc, où λ , α et a sont des réels.