
Corrigé du TD 6 : Polynômes

Ne sont corrigés que les questions non traitées intégralement en classe.

Exercice 1 : (Une suite d' Appell : Centrale light)

Dans tout cet exercice on considère un entier naturel $n \geq 1$ fixé et on pose $E = \mathbb{R}_n[X]$.

On note Φ , l'application définie sur E par $\Phi(P) = 2P(X) - P(X+1)$.

a) Etablir que $\Phi \in L(E)$.

b) Prouver que $Sp(\Phi) = \{1\}$. Φ est-il diagonalisable? est-il bijectif?

c) Vérifier que, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique $P_k \in E$ tel que $2P_k(X) - P_k(X+1) = X^k$.

d) Préciser le degré de P_k , $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

e) Montrer que $P'_{k+1} = (k+1)P_k$, ce pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On pose $F_k = P_k(0)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

f) Justifier : $P_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{n-k} X^k$.

Solution :

f) On raisonne par récurrence sur l'entier $n \geq 1$.

On obtient sans peine $P_0 = 1$ et $P_1 = X+1$ et ainsi $F_0 = F_1 = 1$; ce qui valide l'initialisation.

Supposons la formule établie à un rang $n \geq 1$ alors par e) : $P'_{n+1} = (n+1)P_n = \sum_{k=0}^n (n+1) \binom{n}{k} F_{n-k} X^k$.

Puis par primitivation : $P_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} F_{n-k} X^{k+1} + P_{n+1}(0)$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ donc en posant $j = k+1$, il vient :

$$P_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} F_{n+1-j} X^j + P_{n+1}(0).$$

Mais selon définition $P_{n+1}(0) = F_{n+1}$ d'où $P_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} F_{n+1-j} X^j$. La récurrence se poursuit ■

Exercice 2 : (Polynômes d'Hurwitz : Mines 2022 PSI)

$P \in \mathbb{R}[X]$, non constant, est un polynôme d'Hurwitz si toutes ses racines (complexes) ont une partie réelle strictement négative.

a) On se donne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients strictement positifs et a une racine réelle de P .

Prouver que a est strictement négatif.

b) Démontrer que tout diviseur non constant d'un polynôme d'Hurwitz est du même type.

c) Soit P un polynôme d'Hurwitz irréductible et à coefficient dominant positif. Vérifier que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

On définit les deux polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^n (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,\ell) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2} (X - z_k - z_\ell).$$

d) On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme d'Hurwitz?

e) Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.

f) Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$, alors on a l'équivalence: P est un polynôme d'Hurwitz si et seulement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

Solution :

d) Comme z_1 et z_2 sont conjugués, il suffit de savoir si $S = z_1 + z_2$ est strictement négatif.

On notera que $Q = (X - S)^2(X - 2z_1)(X - 2z_2) = (X - S)^2(X^2 - 2SX + 4P)$, où $P = z_1 z_2$.

Le coefficient du terme en X^3 de Q vaut donc $-4S$ et celui-ci est > 0 par hypothèse, P s'en trouve bien être un polynôme d'Hurwitz■

e) Sans difficulté aucune■

f) Supposons que P soit d'Hurwitz alors P est le produit de facteurs irréductibles (sur $\mathbb{R}$) unitaires (i.e de coefficients dominants égaux à 1); ces facteurs sont eux aussi (par b)) d'Hurwitz donc (grâce à c)) sont à coefficients > 0 et P l'est encore (en appliquant e)).

Q est aussi d'Hurwitz (car à coefficients réels car ses racines sont réelles ou groupables conjuguées 2 à 2, par la même structure pour les racines de P) et on effectue sur Q le raisonnement tenu sur P . Ainsi Q est-il à coefficients > 0 .

Inversement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

a) montre déjà que les racines réelles de P sont bien strictement négatives. Considérons alors z_k une racine de P non réelle dont la partie imaginaire est notée a . Alors $\bar{z}_k$ est aussi une racine de P , il existe donc $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $z_j = \bar{z}_k$. Mais $z_j + z_k = 2a$ est alors une racine réelle de Q dont tous les coefficients sont > 0 . Il en résulte (avec la question a)) que $2a < 0$.

P est bien un polynôme d'Hurwitz■

Exercice 3 : (Polynômes scindés réels, classique)

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé sur $\mathbb{R}$, prouver (si $\deg(P) \geq 2$) que P' est aussi scindé.

b) On suppose que $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$, possède n racines réelles distinctes.

Etablir que $P + P'$ possède aussi n racines réelles distinctes.

Solution :

a) On pose n comme étant le degré de P . Notons $x_1 < \dots < x_s$ les différentes racines (réelles nécessairement

ici) de P et $m_1, \dots, m_s$ leurs multiplicités respectives relativement à P ($n = \sum_{i=1}^s m_i$, ce puisque P scindé sur

$\mathbb{R}$). On peut aussi sans perte de généralité supposer P unitaire, ce qui permet d'écrire que :

$P = (X - x_i)^{m_i} Q_i$, ce pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, où $Q_i \in \mathbb{R}[X]$.

Par simple dérivation des deux membres de cette égalité, il vient que $(X - x_i)^{m_i-1} | P'$.

Bilan 1 : $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P' = Q \prod_{i=1}^s (X - x_i)^{m_i-1}$ et $d^\circ(Q) = s - 1$.

Remarquons que si $s = 1$, l'objectif est atteint et supposons désormais que $s \geq 2$.

Fixons maintenant $i \in \llbracket 1, s - 1 \rrbracket$; par application du théorème de Rolle à P sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ ($P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$ et P dérivable sur $[x_i, x_{i+1}]$), il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$.

Sont ainsi mis en évidence $s - 1$ racines de P' toutes différentes de $x_1, \dots, x_s$ (elles s'intercalent), ce sont donc des (et même les racines de Q qui s'en trouve scindé (à racines simples) sur $\mathbb{R}$. Ceci entraîne :

Bilan 2 : P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et il même scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples s'il en est déjà ainsi pour P .

Le résultat désiré est trivial pour les polynômes à coefficients complexes puisque tout polynôme non constant est scindé mais le raffinement que contient le bilan 2 est faux. $X^4 - 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines complexes alors que ce n'est plus vrai pour son polynôme dérivé■

b) On note $x_1 < \dots < x_n$ les n racines réelles de notre polynôme et on considère $f : x \rightarrow e^x P(x)$ qui est donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème de Rolle à f sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on trouve $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(c_i) = 0 \iff (P + P')(c_i) = 0$. On met en évidence $n - 1$ racines pour $P + P'$ $c_1, \dots, c_{n-1}$ qui sont disposées ainsi $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < \dots < x_{n-1} < c_{n-1} < x_n$. Pour conclure (le degré de $P + P'$ valant n), il nous suffit de trouver une autre racine pour $P + P'$ ou pour f' . Pour cela on observe (Rolle généralisé, expliqué en classe) que $f(x_1) = 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, il existe donc

$c_0 < x_1$ en lequel f' s'annule. Ceci nous permet de conclure ■

NB : Même résultat pour $aP + P'$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 : (Lemme des noyaux du pauvre)

On se donne E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in L(E)$ ainsi que $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

On pose, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_k = \text{Ker}(f - a_k \text{id}_E)$ et $Q = \prod_{j=1}^n (X - a_j)$.

Démontrer que $\text{Ker}(Q(f)) = \bigoplus_{k=1}^n E_k$.

(On aura tout intérêt à utiliser une base d'interpolation de Lagrange).

Solution :

Commençons par des notations.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $Q_k = \prod_{j=1, j \neq k}^n (X - a_j)$ et $t_k = \frac{1}{Q(a_k)}$.

Remarquer alors qu'en posant $\ell_k = t_k Q_k$, on dispose en $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ de la base d'interpolation de Lagrange

en les $a_1, \dots, a_n$ et qu'en particulier (cf TD3) $1 = \sum_{k=1}^n \ell_k = \sum_{k=1}^n t_k Q_k (1)$.

On posera $S = \bigoplus_{k=1}^n E_k$ (d'après **VOTRE COURS : caractérisation géométrique de la diagonalisabilité d'un endomorphisme**, les E_k , $1 \leq k \leq n$, sont bien somme directe), montrons que $S \subset \text{Ker}(Q(f))$ en vérifiant que cette inclusion est valable pour chaque E_k .

Comme $Q = Q_k \times (X - a_k)$ et par propriété des polynômes d'endomorphisme, nous avons $Q(f) = Q_k(f) \circ (f - a_k \text{id}_E)$ et ainsi, pour $x \in E_k = \text{Ker}(f - a_k \text{id}_E)$, $Q(f)(x) = Q_k(f)((f - a_k \text{id}_E)(x)) = Q_k(f)(0_E) = 0_E$. Ce qui donne l'inclusion voulue $\square$

Inversement en utilisant (1), il vient $\text{id}_E = \sum_{k=1}^n t_k Q_k(f)$ donc $x = \sum_{k=1}^n t_k Q_k(f)(x)$ (2), ce pour tout $x \in \text{Ker}(Q(f))$.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $x_k = Q_k(f)(x)$; il nous suffit alors pour vérifier que $\text{Ker}(Q(f)) \subset S$ de prouver que chaque $x_k \in E_k$, ce en vertu de (2).

Montrons ceci : $(f - a_k \text{id}_E)(x_k) = (f - a_k \text{id}_E) \circ Q_k(f)(x) = Q(f)(x) = 0_E$, ce puisque $x \in \text{Ker}(Q(f))$. L'assertion en vue est donc légitimée $\blacksquare$

NB :i) E n'est pas nécessairement de dimension finie dans tout ce qui précède.

Si maintenant E l'est:

En particulier est prouvé que si f possède un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$, à racines simples, f est dz.
(Prendre pour Q un tel polynôme annulateur, comme $E = \text{Ker}(Q(f))$, nous avons bien, par caractérisation géométrique de diagonalisabilité, f diagonalisable). Ceci prouve la réciproque de l'implication démontrée en classe.