
TD4 (DL1) Corrigé partiel

La quasi totalité des questions a été travaillée en classe. Ne sont corrigées ici que 5), 6) 8) et 9) de la partie B.

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \dots \circ u$ (n fois).

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B). On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B .

Partie A

1. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.
 - (a) Montrer que $\text{Im}(w) \subset \ker u^i$.
 - (b) En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.
2. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2$.
 - (a) Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **1b**).
 - (b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .
 - (c) Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.
3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\text{rg}(u) = 1$.
 - (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
 - (b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E .
 - (c) Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
4. On suppose dans cette question que $rg(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

- (a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire une matrice semblable à la matrice M .
- (b) Calculer M^3 et déterminer $rg(M)$.
- (c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.
- (d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

5. On suppose dans cette question que $rg(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

6. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

- (a) Montrer que $\ker(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2) .
 - (b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E , et écrire la matrice de u dans cette base.
 - (c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
7. Réciproquement, toute matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 8. Montrer que toute matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui est le produit de deux matrices de symétrie est semblable à son inverse. Réciproque? (cf Mines PC 2025 écrit).
 9. Généraliser à toute taille de matrice (Même référence).

Solution :

5) Puisque le rang de N vaut 1 c'est que $\alpha\gamma = 0$ ce qui implique aussi que $N^2 = 0_3$.

On observe aussi que $-N$ est de rang 1 et de carré nul. La question 3) de la partie A montre alors que $N \sim -N$ (car toutes les deux semblables à U' . Dès lors il existe $Q \in Gl_3(\mathbb{R})$ tel que $-N = Q^{-1}NQ$ ce qui implique que $I_3 - N = Q^{-1}(I_3 + N)Q$.

Avec les hypothèses et le 2) de cette partie nous savons que $A \sim I_3 + N$ et $A^{-1} \sim I_3 - N$ donc par transitivité

$$\boxed{A \sim A^{-1}} \blacksquare$$

6)a) On trouve sans peine que $\ker(u - id_E) = Vect(a, b - c)$. On pose $\boxed{e_1 = a \text{ et } e_2 = b - c}$ ■

b) (e_1, e_2) est une base de $\ker(u - id_E)$ (donc libre) et $c \notin \ker(u - id_E)$ puisque $f(c) = -b + 2c \neq c$ donc cette famille est bien libre et de cardinal = $\dim(E)$, il s'agit d'une base de E .

Par ailleurs $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ et $f(c) = -b + 2c = -c - e_2 + 2c = -e_2 + c$.

Donc la matrice de f dans la base considérée est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ■

c) Il suffit d'appliquer le 5) précédent ■

Pour les deux dernières questions, l'énoncé attendait des pistes ou des réponses partielles seulement.

8)et9) Pour la première partie de la question, on considère deux matrices réelles de symétrie, notées S et R ,

de taille $n \geq 1$. Montrons que $(SR)^{-1} = R^{-1}S^{-1} = RS$ (matrices de symétrie !) et SR sont semblables. Il suffit d'observer que $RS = R(SR)R = R^{-1}(SR)R$ □

Notons aussi (vrai dans le cadre général) que toute matrice semblable à une matrice de symétrie est encore une matrice de symétrie donc que toute matrice semblable à un produit de deux (etc...) matrices de symétrie est en fait un produit de deux matrices de symétrie. □

La réciproque évoquée en , même pour $n = 3$, est d'une toute autre difficulté. Nous apportons une réponse (très) partielle.

On se donne une matrice semblable A à $I_n + N$, où $rg(N) = 1$ et $N^2 = 0_n$.

Toutes les matrices N sont semblables à la matrice, donnée par blocs par commodité, $W = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 1 \\ 0_{1,n-1} & 0_{n-1,1} \end{pmatrix}$ (passer à f l'endomorphisme canoniquement associé, considérer un vecteur x_n dirigeant l'image de g , prendre en compte que $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Vect(x_n)$ et compléter $(x_1 = f(x_n))$ pour obtenir une base $(x_1, \dots, x_{n-1})$ de $Ker(f)$; W est alors la matrice de f dans la base $(x_1, \dots, x_n)$).

En particulier $I_n - N = (I_n + N)^{-1}$ est semblable à $I_n + N$ et $A \sim A^{-1}$, nous allons montrer que $I_n + W$ est le produit de deux matrices de symétries, ce qui, par remarques précédentes, prouvera que A l'est aussi. On définit alors $K = diag(1, \dots, 1, -1)$ et $Z = K + N$ et on voit que $K^2 = Z^2 = I_n$ et $KZ = W$ ■