
TD 5 : Corrigé partiel

Exercice 1 : (Centrale 2015 écrit partiel)

On note D l'opérateur de dérivation de $\mathbb{K}[X]$ et on considère F un sev de $\mathbb{K}[X]$, stable par D .

1) On suppose ici que F est de dimension finie ≥ 1 .

a) Prouver que $\{\deg(P), P \in F - \{0\}\}$ possède un plus grand élément, noté m .

On choisit $P \in F$ de degré m .

b) Etablir que $(P, D(P), \dots, D^m(P))$ est une famille libre de F .

c) En déduire que $F = \mathbb{K}_m[X]$.

2) F n'est pas de dimension finie désormais. En s'inspirant de la méthode précédente montrer que $F = \mathbb{K}[X]$.

3) Quels sont tous les sev de $\mathbb{K}[X]$ stables par D ?

Exercice 2 : (endomorphisme nilpotent d'indice maximal)

Ici $\dim(E) = n \geq 1$. On considère $f \in L(E)$ tel que $f^n = \omega$, où ω est l'endomorphisme nul de E . On suppose en outre que $f^{n-1} \neq \omega$.

1) Justifier l'existence d'un x de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

2) Etablir que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E , notée b .

3) Donner la matrice de f dans la base b . Préciser noyau et image de f .

4) En déduire que les matrices $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables

Exercice 3 : (Vandermonde)

a) Donner un exemple de n nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 0$.

b) Soient n nombres complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k^2, \sum_{k=1}^n x_k^3, \dots, \sum_{k=1}^n x_k^n$ est non nulle.

Solution :

a) Corrigé en classe.

b) On raisonne par l'absurde en supposant ces n sommes nulles et on traduit le système obtenu matriciellement par :

$$MX = 0_{n,1}, \text{ où on a posé } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ et } M = (x_j^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ (qui est une matrice de Vander-}$$

monde d'ordre n).

Comme les x_i sont deux à deux distincts, M est inversible et $MX = 0_{n,1} \implies X = M^{-1}0_{n,1} = 0_{n,1}$. Ce qui signifierait que tous les x_i sont nuls. Absurde ■

Exercice 4 : (Matrices de trace nulle)

On pose :

a) n entier naturel non nul.

b) T est l'ensemble des éléments de $M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.

c) $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$.

d) E $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

1) On se donne $f \in L(E)$ tel que : $(x, f(x))$ lié pour tout x de E (*)

En appliquant (*) aux éléments d'une base de E , montrer que f est une homothétie de E .

On se propose de montrer par récurrence sur n que tout élément de T est semblable à une matrice de diagonale nulle.

2)a) Initialiser.

b) On suppose la propriété à démontrer vraie au rang $n-1$ et on se donne $A \in T$.

i) Conclure si A est scalaire.

ii) On suppose ici que A n'est pas scalaire, établir que A est semblable à une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & & & & \\ 0 & & (B) & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

avec $a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$ et B dans $M_{n-1}(\mathbb{K})$. Conclure aussi.

3) En utilisant que $M \rightarrow MD - DM$, montrer que $(U, V) \rightarrow UV - VU$ réalise une surjection de $(M_n(\mathbb{K}))^2$ sur T .

4) Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A \in T$; vérifier qu'il existe U, V, W de $M_n(\mathbb{C})$ telles que :

$A = UVW + jWUV + j^2VWU$. Proposer, sans démonstration, une généralisation.

Solution :

1) Sera corrigé lundi en TD.

2) a)+b)i) Dans les deux cas A est scalaire : $A = \mu I_n \Rightarrow \text{tr}(A) = n\mu = 0$ soit $\mu = 0$ et $A = 0_n$ qui est, entre autre, à diagonale nulle.

b) ii) Puisque A n'est pas scalaire, θ l'endomorphisme canoniquement associé à A , n'est pas une homothétie de $\mathbb{K}^n$ donc par 0) (contraposée) il existe x de $\mathbb{K}^n$ tel que $(x, \theta(x))$ soit libre et si on complète cette dernière en une base de $\mathbb{K}^n$, la matrice de θ dans cette base possède une forme similaire à celle exigée par l'énoncé. Celle-ci se note M ; représentant θ dans une base, elle est bien semblable à A . Comme $0 = \text{tr}(A) = \text{tr}(M) = \text{tr}(B)$, on peut appliquer à B l'hypothèse de récurrence, à savoir $S = Q^{-1}BQ$ avec $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ et S , matrice de même taille et à diagonale nulle. Considérons la matrice par blocs

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & (Q) \\ \vdots & \end{pmatrix} \text{ qui est inversible avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & (Q^{-1}) \\ \vdots & \end{pmatrix} \text{ puis effectuons le produit matriciel}$$

$$\text{par blocs } P^{-1}MP; \text{ ce qui donne } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & (X) \\ 0 & (S) \\ \vdots & \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant semblable à M , elle l'est aussi à A et de trace nulle. Ainsi la propriété à vérifier s'en trouve héréditaire et, par récurrence, se valide pour tout entier naturel non nul.

2) $\ell : M \rightarrow MD - DM$ appartient à $L(M_n(\mathbb{K}))$ et son noyau est constitué des matrices commutant avec D . Or (m_{ij}) commute avec $D \Leftrightarrow jm_{ij} = im_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Ceci équivaut à dire que M est diagonale. Par conséquent $\dim(\text{Ker}(\ell)) = n \Rightarrow$ (formule du rang) $\text{rg}(\ell) = n^2 - n$ or $\text{Im}(\ell)$ est, par le calcul précédent, inclus dans Z . Mais puisque $\dim Z = n^2 - n$, il vient que $\text{Im}(\ell) = Z$.

Considérons alors $X \in T$, grâce à 1): $\exists S \in Z, \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), X = P^{-1}SP$ et, parce que $\text{Im}(\ell) = Z, \exists M \in M_n(\mathbb{K}), S = MD - DM$; il en résulte que $X = P^{-1}(MD - DM)P = P^{-1}MDP - P^{-1}DMP$, on pose alors $U = P^{-1}MP, V = P^{-1}DP$ et $X = UV - VU$, ce qui fournit la surjectivité souhaitée $\square$

3) $\frac{1}{j}A \in T$ et, par 2) il existe deux matrices W, V de $M_n(\mathbb{C})$ telles que : $\frac{1}{j}A = WV - VW \Rightarrow A = jWV + (1 + j^2)VW = UVW + jWUV + j^2VWU$, en prenant $U = I_n$. Une généralisation possible : posons $\tau = \exp(\frac{2i\pi}{m})$ où m entier ≥ 2 et $A \in T$; il existe alors m éléments de $M_n(\mathbb{C})$ $U_1, \dots, U_m$ tels que : $A = U_1 \dots U_m + \tau U_m U_1 \dots U_{m-1} + \dots + \tau^{m-1} U_2 \dots U_1$.