Exercice 7 du test

On reformule cet exercice obéré, à l'origine, par trop de fautes de frappe. Un corrigé l'accompagne

Exercice 7
On se donne quatre réels x, y, z, t et on pose $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} z & t \\ t & -z \end{pmatrix}$ puis $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$.
a) On se propose de calculer Δ, le déterminant de M.
En effectuant successivement les manipulations suivantes:
$C_1 \leftarrow C_1 + iC_3$, $C_2 \leftarrow C_2 + iC_4$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - iL_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - iL_2$, vérifier que :
$\boxed{\Delta = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2}$. (i est le nombre complexe usuel)
Soient a, b, c, d des réels.
b) Tenter d'établir avec un calcul matriciel par blocs que :
$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (ax + by + cz + dt)^2 + (ay - bx + ct - dz)^2 + (az - bt - cx + dy)^2 + (at + bz - cy - dx)^2$.
c) Décomposer (de tête) 615 comme somme de quatre carrés parfaits.
Solution :
a) En suivant les manipulations suggérées, il vient :
$\Delta = \det \begin{pmatrix} X & -B \\ 0_2 & Y \end{pmatrix}$, où $X = \begin{pmatrix} x - iz & -y - it \\ y - it & x + iz \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x + iz & -y + it \\ y + it & x - iz \end{pmatrix}$.
On a affaire à un déterminant triangulaire par blocs qui conduit à $\Delta = \det(X)\det(Y) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$ ■
b) On pose alors $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ puis $N = \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}$.
Alors par multiplication par blocs, nous obtenons $NM = \begin{pmatrix} E & -F \\ F & E \end{pmatrix}$, où $E = CA - DB = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ avec $u = ax - by - cz - dt$, $v = ay + bx + ct - dz$ puis
$F = DA + CB = \begin{pmatrix} s & w \\ w & -s \end{pmatrix}$ et $s = az - bt + cx + dy$, $w = at + bz - cy + dx$.
Dès lors nous avons $\det(N)\det(M) = (u^2 + v^2 + s^2 + w^2)^2$ avec le a) et, à nouveau par ce biais et en passant aux racines carrées (tout est positif) :
$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (ax - by - cz - dt)^2 + (ay + bx + ct - dz)^2 + (az - bt + cx + dy)^2 + (at + bz - cy + dx)^2$.
Ce n'est pas exactement la formule voulue mais il suffit d'y remplacer x par son opposé pour l'obtenir ■
c) $615 = 15 \times 41 = (3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2)(5^2 + 4^2 + 0^2 + 0^2) = 23^2 + 2^2 + 1^2 + 9^2$ ■