
Corrigé du Test du 24 septembre

On n'abordera les trois derniers exercices qu'après avoir traité à fond les quatre premiers.

Exercice 1 :

Que vaut $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 9 & 25 & 49 \end{vmatrix}$?

On veut un résultat direct et simplifié.

Solution :

On reconnaît en ce déterminant $V(3, 5, 7) = (5 - 3)(7 - 3)(7 - 5) = 16$ ■

Exercice 2 :

Les matrices suivantes sont-elles semblables?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution :

NON, puisque $\det(A) = 10 \neq \det(B) = 9$ ■

Exercice 3 :

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ canoniquement représenté à $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- a) Etablir que $D = Vect((1, 1, 1))$ est stable par f .
- b) Exhiber une base du plan d'équation (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) : $x + y + z = 0$.
- c) En déduire que ce plan est stable par f .
- d) Donner une matrice représentant f dans une base adaptée à D .

Solution :

On pose $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (0, 1, -1)$.

- a) Comme $f(u) = u$, $D = Vect(u)$ est stable par f .
- b) On a immédiatement $P = Vect(v, w)$; v et w non colinéaires donc (v, w) est une base de P .
- c) Grâce à A , il vient $f(v) = (1, 3, -3) - (3, -2, 0) = (-2, 5, -3) \in P$ et $f(w) = (6, -2, -4) \in P$; ce qui justifie que P est bien stable par f .
- d) Avec c) $f(v) = -2v + 3w$ et $f(w) = 6v + 4w$ et avec $f(u) = u$, on peut donc affirmer que la matrice de f dans la base (u, v, w) (c'est une base de $\mathbb{R}^3$ car de cardinal 3 et libre puisque $u \notin P$) est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la trace de cette matrice vaut celle de A ■

Exercice 4 : (Matrice de transposition)

On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $E = \mathbb{R}^3$.

- a) Etablir que P est une matrice de symétrie; on note s l'endomorphisme canoniquement associé.
 - b) Déterminer les noyaux de $s - id_E$ et de $s + id_E$ et prouver qu'ils sont supplémentaires dans E .
- Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$.

- c) Préciser les lignes (resp. les colonnes) de PM (resp. de MP).

- d) (Oral Centrale, énoncé sec, i.e sans c)), prouver que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Solution :

- a) Clair puisque $P^2 = I_3$.

b) Il vient sans peine $\boxed{Ker(s - id_E) = Vect((1, 1, 0); (0, 0, 1))}$ et $\boxed{Ker(s + id_E) = Vect((1, -1, 0))}$.

Si x appartient aux deux noyaux, on a $s(x) = x$ et $s(x) = -x$ donc, par différence $2x = 0_E$ soit $x = 0_E$; les deux noyaux sont bien en somme directe. La somme de leur dimension est $3 = \dim(E)$, ils sont donc supplémentaires dans E .

c) Les lignes de PM s'obtiennent en permutant les deux premières lignes de M et en laissant la troisième inchangée.

Même chose en ce concerne les colonnes pour MP .

d) On a donc $B = PAP = P^{-1}AP$ puisque P matrice de symétrie et $\boxed{A \sim B}$ ■

Exercice 5 : (Invariant de similitude)

Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, $S(A) = \sum_1^n a_{ij}a_{ji}$ est-il un invariant de similitude?

(On pourra déterminer les coefficients diagonaux de A^2).

Solution :

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{ii}^2 = \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji}$ donc $S(A) = tr(A^2)$.

Si maintenant B est une matrice de même nature, semblable à A , il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. On a donc aussi $B^2 = P^{-1}A^2P$ ou $A^2 \sim B^2$ soit $tr(A^2) = tr(B^2) \iff S(A) = S(B)$ et S est bien un invariant de similitude ■

Exercice 6 :

a) La somme de deux matrices inversibles est-elle inversible?

b) Toute matrice est-elle somme de deux matrices inversibles?

Solution :

a) NON puisque $I_2 + (-I_2) = 0_2$.

b) OUI. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$.

Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{ii}| < m$ (en particulier $a_{ii} \pm m \neq 0$, ce pour tout i).

Pour $(i, j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$, on pose $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i < j \\ \frac{a_{ii} - m}{2} & \text{si } i = j \end{cases}$ et $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ a_{ij} & \text{si } i < j \\ \frac{a_{ii} + m}{2} & \text{si } i = j \end{cases}$.

Dans ce contexte $B = (b_{ij})$ est une matrice triangulaire inférieure, à éléments diagonaux non nuls; elle est donc inversible.

De façon similaire $C = (c_{ij})$ matrice triangulaire supérieure, à éléments diagonaux non nuls, est inversible aussi.

Enfin $A = B + C$ ■