Mise au point sur les polynômes

Comme d'habitude $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.

1 (Ordre de) Multiplicité d'une racine

Définition 1 *Soit $P \in (\mathbb{K}[X])^*$ admettant $a \in \mathbb{K}$ comme racine.*
On appelle multiplicité de a relativement à P le plus grand des entiers naturels k tels que $(X-a)^k | P$; on la note $m_P(a)$.
On observe que $m_P(a) \geq 1$.
On peut convenir que $m_P(a) = 0$ si a n'est pas racine de P.

On dispose des caractérisations suivantes de cette multiplicité :

Proposition 1 *Soit $(P, a, m) \in ((\mathbb{K}[X])^*, \mathbb{K}, \mathbb{N})$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $m = m_P(a)$.
ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^m Q$ et $Q(a) \neq 0$.
iii) Pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Enfin et en notant $Z(P)$ l'ensemble des racines dans $\mathbb{K}$ d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, nous avons :

Proposition 2 *Soit $P \in (\mathbb{K}[X])^*$: $\boxed{\displaystyle\sum_{a \in Z(P)} m_P(a) \leq d°(P)}$.*
Par contraposée, si $\displaystyle\sum_{a \in Z(P)} m_P(a) > d°(P)$ alors $P = 0$.

2 Polynômes scindés sur (ou dans) $\mathbb{K}$

Proposition 3 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ dont le coefficient dominant est noté $\boxed{a}$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\boxed{\begin{array}{l} i)\exists (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n, P = a\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - x_i). \\ ii) n = \displaystyle\sum_{a \in Z(P)} m_P(a). \\ iii)\ P = a \displaystyle\prod_{a \in Z(P)} (X-a)^{m_P(a)}. \end{array}}$$

Dès lors :

Définition 2 *Si une des propriétés précédentes s'avère vraie, le polynôme P est dit $\boxed{\text{scindé sur } \mathbb{K}}$.*

Le théorème de d'Alembert-Gauss ou fondamental de l'algèbre stipule donc que :

Proposition 4 $\boxed{\textit{Tout polynôme non constant de } \mathbb{C}[X] \textit{ est scindé sur } \mathbb{C}}$.
(En revanche $X^4 - 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$)

On retiendra (en gardant notation et contexte de la proposition 3) que :

Remarque 1 *On peut factoriser P de deux façons. a) Avec ii) de la proposition 3 et $x_1, ..., x_n$ est une liste des racines de P; les x_i ne sont pas nécessairement distincts. Chaque racine de P apparaît dans cette liste autant de fois que sa multiplicité.*
b) Avec iii).