Feuille d'exercices 2
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(c)

(d)

Exercice 2.

(e) L'équation (E) est définie sur $D = [1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in D, \quad (E) &\Leftrightarrow (x+1) + (x-1) + 2\sqrt{x^2-1} < 3x+1 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-1} < x+1 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow 4(x-1) < x+1 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{5}{3} \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de (E) est $\left[1, \frac{5}{3}\right[$.

(f) L'équation (E) est définie sur $D = \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in D, \quad (E) &\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^2} \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \left|\sqrt{x}-2\right| \geq 3. \end{aligned}$$

Par disjonction de cas :

- $\forall x \in [1,4],\ (E) \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq -1$, ce qui est impossible,
- $\forall x \in [4, +\infty[,\ (E) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 25$,

donc l'ensemble des solutions de (E) est $[25, +\infty[$.

Exercice 3.

(a) On a : $(a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.
La dernière assertion est évidemment vraie, donc, par équivalence, la première l'est aussi.

(b) D'après (a) : $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 4ab \times 4bc \times 4ca = 64a^2b^2c^2$, donc, en passant à la racine carrée : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

(c) D'après (b) : $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) \geq 8$, donc $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 1 + \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) \geq 9$.

Exercice 4. L'équation est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -a-b\}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in D, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b} &\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = -\frac{a+b}{x(x+a+b)} \\ &\Leftrightarrow x(x+a+b) = -ab \\ &\Leftrightarrow x^2 + (a+b)x + ab = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+a)(x+b) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+a = 0 \text{ ou } x+b = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -a \text{ ou } x = -b, \end{aligned}$$

donc $S = \{-a, -b\}$.

Exercice 5. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (a+bx)^2 + (c+dx)^2 \geq 0$, donc le discriminant Δ du trinôme $f(x)$ est négatif. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (b^2+d^2)x^2 + 2(ab+cd)x + (a^2+c^2),$$

donc : $\Delta = 4(ab+cd)^2 - (a^2+c^2)(b^2+d^2)$. Donc $(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2)$, donc $|ab+cd| \leq \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$.

Exercice 8.

(c)
- Si n est impair, on pose $n = 2p+1$:
$\displaystyle\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k(2k+1) = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (4p+1) - (4p+3) = -2(p+1) = -n-1,$
- Si n est pair, on pose $n = 2p$:
$\displaystyle\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k(2k+1) = 1-3+5-7+\cdots-(4p-1)+(4p+1) = -2p+(4p+1) = 2p+1 = n+1,$

Dans tous les cas, on a donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1) = (-1)^n(n+1)$.

(d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1} = \frac{5}{1}\frac{7}{3}\frac{9}{5}\cdots\frac{2n-1}{2n-5}\frac{2n+1}{2n-3}\frac{2n+3}{2n-1} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{3}$.

Exercice 10.

(a) D'après la formule des sommes géométriques : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k} = \frac{1-\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \leq \frac{4}{3}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k! \leq \sum_{k=0}^{n}n! = (n+1)\times n! = (n+1)!$.

Exercice 12.

(e) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}\min(i,j) = 2\sum_{0\leq i\leq j\leq n} i - \sum_{0\leq i=j\leq n} i = 2\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} i - \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{j=0}^{n} j(j+1) - j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(f) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}|i-j| = 2\sum_{0\leq i\leq j\leq n}(j-i) = 2\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}(j-i) = \sum_{j=0}^{n} j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 14.

(a) On a : $\displaystyle 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \geq \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$,

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$: $\displaystyle(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \geq \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 = 1 + nx$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$(1+\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{2}^k = \sum_{0\leq 2p\leq n}^{n}\binom{n}{2p}2^p + \sum_{0\leq 2p+1\leq n}^{n}\binom{n}{2p+1}2^p\sqrt{2},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{0 \le 2p \le n}^{n} \binom{n}{2p} 2^p \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{0 \le 2p+1 \le n}^{n} \binom{n}{2p+1} 2^p.$$

On peut vérifier que les suites (a_n) et (b_n) sont caractérisées par :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ \text{et} : \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n + 2b_n,\ b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Exercice 18.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1},$

(c)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} + n2^{n-1} \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \end{aligned}.$$

Exercice 19.

(a) Par récurrence sur n : l'assertion est vraie pour $n = p$; supposons-la vraie pour un certain $n \geq p$, alors : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$; donc l'assertion est vraie au rang $n+1$.

(b) Pour $p = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$

(c) Pour $p = 2$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$, d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$