Devoir à la maison n° 1
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Vrai : Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que : $\forall y \in \mathbb{R},\ xy = 0$. Alors, en particulier, $1 \times x = 0$, donc $x = 0$. L'assertion est donc démontrée.
2. Faux : Par exemple, pour $x = 2$ et $y = 0$, on a $xy = 0$ et $x \neq 0$.
La négation de l'assertion s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (xy = 0)$ et $(x \neq 0)$.
3. Vrai : Soit $n \in \mathbb{Z}$. On raisonne par disjonction de cas : si $n \geq 0$, alors l'assertion est vérifiée. Sinon, on a $n < 0$, donc $n \leq 0$. L'assertion est donc à nouveau vérifiée. L'assertion est donc vérifiée dans tous les cas.
4. Faux : L'assertion « $\forall n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0$ » est fausse car, par exemple, pour $n = -3$, $-3 < 0$. Et de même, l'assertion « $\forall n \in \mathbb{Z},\ n \leq 0$ » est fausse en prenant par exemple $n = 3$.
La négation de l'assertion s'écrit : $(\exists n \in \mathbb{Z},\ n > 0)$ et $(\exists n \in \mathbb{Z},\ n < 0)$.

Exercice 2.

1. (a) On a directement, par identité remarquable :
$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = (n+1) - n = 1,$$
d'où l'égalité voulue.

(b) On raisonne par récurrence :
Notons, pour tout $n \geq 2$, $P(n)$ l'assertion : « $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ ».
Pour $n = 2$, on a :
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 > 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow 2 > 1.$$
La dernière inégalité étant vraie, la première l'est aussi par équivalence. Donc $P(2)$ est vraie.
Soit $n \geq 2$, supposons $P(n)$ vraie ; c'est-à-dire :
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$
Alors :
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$
donc, d'après la question (a) :
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \sqrt{n+1},$$
donc $P(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 2$.

2. (a) On a :

$$2n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 > 0.$$

Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$, et pour racines $r_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Comme son coefficient dominant est positif, l'assertion $n^2 - 2n - 1 > 0$ est donc vraie si et seulement si $n > 1 + \sqrt{2}$ (ou $n < 1 - \sqrt{2}$, ce qui est impossible car $n \geq 0$), c'est-à-dire $n \geq 3$.

(b) Soit $n \geq 3$. Supposons $P(n)$.
Alors $2^n > n^2$, donc $2^{n+1} > 2n^2$. Donc, d'après (a), comme $n \geq 3$: $2^{n+1} > (n+1)^2$, c'est-à-dire $P(n+1)$.
On a donc bien : $\forall n \geq 3,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

(c) Par un calcul direct : $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies, $P(2)$, $P(3)$ et $P(4)$ sont fausses, et $P(5)$ est vraie.
D'après l'hérédité montrée en (b), l'assertion $P(n)$ est donc vraie si et seulement si $n \leq 1$ ou $n \geq 5$.