

Devoir à la maison n° 1

Exercice 1. Déterminer si chaque assertion est vraie ou fausse (et le démontrer !). On énoncera la négation des assertions fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall y \in \mathbb{R}, xy = 0) \Rightarrow x = 0$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy = 0 \Rightarrow x = 0$,
3. $\forall n \in \mathbb{Z}, (n \geq 0 \text{ ou } n \leq 0)$,
4. $(\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0) \text{ ou } (\forall n \in \mathbb{Z}, n \leq 0)$.

Exercice 2.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
(b) Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 2, \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $2n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow n \geq 3$.
(b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion $(2^n > n^2)$.
Montrer que : $\forall n \geq 3, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
(c) Pour quelles valeurs de n l'assertion $P(n)$ est-elle vraie ?