TD 3 (Corrigé) : Interpolation de Lagrange

Dans certains problèmes numériques (méthode de Simpson par exemple), il convient de substituer à une fonction donnée une fonction plus simple (en général polynomiale et de degré minimal) prenant en des points fixés (et à choisir mais c'est une autre question) les mêmes valeurs que la fonction initiale (c'est interpoler $\approx$ particulariser ou contraire d'extrapoler).

Ne sont corrigées que les parties non abordées avec toute la classe.

(Interpolation [1] de Lagrange : Partie COURS)
n désigne un entier naturel.
On se donne $x_0 < x_1 \ldots\ldots < x_n$ $n+1$ réels.
a) Montrer que l'application Φ qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $(P(x_0), \ldots\ldots, P(x_n))$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.
En déduire que le déterminant de Vandermonde (il est d'ordre $n+1$) i.e celui de la matrice $(x_{j-1}^{i-1})_{1\leq i,j\leq n+1}$ est non nul.
On note I un segment contenant tous les x_i et on se donne f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
b) Etablir qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\boxed{\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(x_i) = f(x_i)}$.
Cet unique polynôme est $\boxed{\text{le polynôme d'interpolation de Lagrange de } f \text{ en les points } x_0, \ldots, x_n}$.
On le notera, faute de mieux, $\boxed{L_n(f)}$. On justifiera rapidement que L_n est une application linéaire surjective de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ (coïncidant avec l'identité sur $\mathbb{R}_n[X] \hookrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$). En donner aussi le noyau.
On pose, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\ell_i = \displaystyle\prod_{0\leq j\leq n, j\neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$.
c) Vérifier que $\ell_i(x_k) = \delta_{i,k}$, où δ désigne le symbole de Kronecker, ce pour tout $(i, k) \in [\![0, n]\!]^2$.
d) En déduire que $(\ell_0, \ldots\ldots, \ell_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, dite base de Lagrange en les les points $x_0, \ldots, x_n$.
e) Prouver que $\boxed{L_n(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i}$ (Lagrange).
f) Que vaut, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i^k \ell_i$? Et pour $k = n+1$?

Solution :
b) La bijectivité de Φ permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'un $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi(P) = (f(x_0), \ldots, f(x_n))$, il en résulte l'existence et l'unicité $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $(P(x_0), \ldots\ldots, P(x_n)) = (f(x_0), \ldots, f(x_n))$■
On notera, linéarité évaluation, que $L_n \in L(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X])$ et (en assimilant polynôme et fonction polynôme et en voyant $\mathbb{R}_n[X]$ comme un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$) que (par unicité) **tout élément de $\mathbb{R}_n[X]$ est son propre interpolant de Lagrange**. Donc on retiendra :

Remarque 1 $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ L_n(P) = P$

La surjectivite de L_n en découle.
f) En utilisant la remarque grisée précédente et la formule de Lagrange démontrée en e), il vient :
$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \sum_{i=0}^{n} x_i^k \ell_i = L_n(X^k) = X^k}.$$
Pour $k = n+1$ la remarque grisée ne sert plus aussi directement. On peut néanmoins observer que $Q = X^{n+1} - \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - x_i) \in \mathbb{R}_n[X]$) donc que $L_n(Q) = Q$ soit, par linéarité $L_n(X^{n+1}) - L_n(\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)) = Q$.
Comme le seul polynôme de degré $\leq n$ ayant tous les x_i comme racines est le polynôme nul, on a $L_n(\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)) = 0$, ce qui donne enfin :

[1] interpoler un texte = en supprimer certains mots

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} x_i^{n+1}\ell_i = L_n(X^{n+1}) = Q = X^{n+1} - \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)}$$ ■

(Erreur d'interpolation de Lagrange)
On garde les notations de l'exercice précédent mais on suppose f de classe C^{n+1} sur I.
On pose $\pi(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$, ce pour tout réel t et on se propose de montrer que :

6 $\boxed{\forall x \in I,\ \exists c_x \in I \mid f(x) - L_n(f)(x) = \frac{\pi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)}$.

On notera que cette formule est évidemment vérifiée si x est un des points d'interpolation; on fixe donc $x \in I$ et $x \neq x_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Enfin on pose $g(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \frac{\pi(t)}{\pi(x)}(f(x) - L_n(f)(x))$, ce pour tout $t \in I$.

a) Vérifier que g s'annule $n + 2$ fois sur I.
b) En appliquant de façon répétée et justifiée le théorème de Rolle, prouver le résultat en vue.
c) On envisage le cas de l'interpolation linéaire $n = 1$. On posera $x_0 = a < b = x_1$. Etablir que $\boxed{\forall x \in [a, b],\ |f(x) - \frac{(f(b) - f(a))x + bf(a) - af(b)}{b - a}| \leq \frac{M(b-a)^2}{8}}$, où M désigne le maximum de $|f"|$ sur le segment $[a, b]$.

Solution :

a) On voit sans peine que g s'annule en tous les x_i et en x ■
b) Ceci entraîne que g' s'annule $n+1$ fois par Rolle (g étant dérivable sur I) entre deux zéros consécutifs (ceux mis en évidence en a)). En répétant l'argument, on comprend que $g^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur I. On note c_x un tel point d'annulation pour $g^{(n+1)}$.
Or $g^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(c_x) - 0 - \frac{(n+1)!}{\pi(x)}(f(x) - L_n(f)(x))$, ce puisque d°$(L_n) \leq n$ et que d°$(\pi) = n + 1$ et que π est unitaire.
De $f^{(n+1)}(c_x) - 0 - \frac{(n+1)!}{\pi(x)}(f(x) - L_n(f)(x)) = 0$, on tire la relation voulue■
c) On pose $L = L_2$. La formule de Lagrange (e) de l'exercice précédent) donne :
$\boxed{L = \frac{(f(b) - f(a))X + bf(a) - af(b)}{b - a}}$ donc, en passant aux valeurs absolues dans le b), il vient :
$\forall x \in [a, b] \subset I,\ \exists c_x \in I$ tel que $|f(x) - L(x)| = (x - a)(b - x)\frac{|f"(c_x)|}{2}$.
A fortiori et dans le même contexte : $|f(x) - L(x)| \leq \frac{M(x-a)(b-x)}{2}$.
Une étude ou autre de $x \to (x - a)(b - x)$ sur $[a, b]$ prouve que cette fonction atteint son maximum pour $x = \frac{a+b}{2}$ et qu'ainsi on a bien :

$$\boxed{\forall x \in [a, b],\ |f(x) - \frac{(f(b) - f(a))x + bf(a) - af(b)}{b - a}| \leq \frac{M(b-a)^2}{8}}$$ ■