
DS 1 (Corrigé).

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés.

Tout manquement à ces consignes sera sanctionné.

.....

Exercice 1 : (Etude d'une série)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $n \geq 1$ $u_n = a \ln(n+2) + b \ln(n+1) + c \ln(n)$.

a) Vérifier que $u_n = (a+b+c) \ln(n) + \frac{2a+b}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ si $n \rightarrow +\infty$.

b) En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante de convergence pour $\sum_{n \geq 1} u_n$ est $b = -2a$ et $c = a$, a étant arbitraire.

On se place désormais sous cette contrainte.

c) En simplifiant les sommes partielles de cette série, donner la valeur de sa somme.

d) On note, pour $n \geq 1$, R_n le reste d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Donner un équivalent simple de R_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

La série $\sum_{n \geq 1} R_n$ converge-t-elle ?

Solution :

a) Pour n assez grand : $u_n = a \ln(1+2/n) + b \ln(1+1/n) + (a+b+c) \ln(n) = \frac{2a}{n} + \frac{b}{n} + O(1/n^2) + (a+b+c) \ln(n) \square$

b) Si $a+b+c \neq 0$, le a) montre que la suite $(|u_n|)$ diverge vers $+\infty$ et stigmatise la divergence grossière de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Pour que cette série converge il faut donc que $a+b+c = 0$, ainsi (cf a)) $u_n = \frac{2a+b}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ si $n \rightarrow +\infty$.
Si $2a+b \neq 0$, u_n est une série à termes de signe constant APCR (signe dépendant de celui de $2a+b$ bien sûr) dont le terme général est équivalent à $\frac{2a+b}{n}$; la divergence de la série harmonique conduit, par comparaison, à celle de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Il est aussi nécessaire que $2a+b = 0$. Inversement si les deux conditions précédentes sont acquises alors $u_n = O(\frac{1}{n^2})$ donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} u_n$ est ACV donc CV $\square$

c) Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$; il vient $S_n = a(\sum_{k=1}^n ((\ln(k+2) - \ln(k+1)) - (\ln(k+1) - \ln(k)))) = \ln(1 + \frac{1}{n+1}) - \ln 2$, ce par télescopage. En passant à la limite sur n , on récupère que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -a \ln 2 \square$

d) En revenant à la définition du reste (Somme de la série - somme partielle), on obtient $R_n = -a \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \sim -a \frac{1}{n+1}$; ce qui montre la divergence de la série en question sauf si $a = 0 \blacksquare$

Exercice 2 : (Constante d'Euler)

On définit la suite de terme général u_n pour $n \geq 1$ par la relation:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

a) Montrer que cette suite est convergente. Sa limite est notée γ .

b) Déterminer un encadrement de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ par comparaison série-intégrale (en faisant intervenir

$x \rightarrow 1/x$), ce pour tout $n \geq 1$.

c) Etablir alors que $\gamma \in [0, 1]$.

d) Prouver par considération d'aire que :

$$u_n - \frac{1}{2n} \leq \gamma \leq u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}, \text{ ce pour } n \geq 1.$$

e) En déduire un encadrement de γ inférieur à 0,25.

Solution :

a) Intégralement dans votre cours $\square$

b) Comparaison série intégrale utilisant la décroissance de la fonction inverse donne $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$ pour

$k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi en sommant ces inégalités, nous obtenons (encadrement vu en cours et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$):

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n) \text{ donc a fortiori } \ln(n) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

Ce qui implique $\boxed{0 \leq u_n \leq 1} \square$

c) Par conservation des inégalités larges à la limite dans c), on récupère sans peine $\boxed{0 \leq \gamma \leq 1} \square$

d) Question fine corrigée en document annexe et dont la solution s'appuie sur la convexité de la fonction inverse pour les réels strictement positifs.

e) Il suffit de prendre $n = 1$ dans l'encadrement prouvé en d). Il vient : $\boxed{0,5 \leq \gamma \leq 0,75} \square$

Rq : Pour $n = 4$ le membre de gauche de l'encadrement d) donne à peu près 0,57, ce qui est déjà une bonne valeur approchée de la constante d'Euler.

Exercice 3 : (Zeta 2)

On se propose en un premier temps de déterminer $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ puis d'en vérifier l'irrationalité.

PARTIE I

Dans cette partie on pose, pour tout t réel : $h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$, et on définit la fonction ϕ sur $[0, \pi]$ par :

$$\phi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \phi(t) = \frac{h(t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad \text{pour } t \in]0, \pi].$$

1) Montrer que la fonction ϕ est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, \pi]$.

2) Calculer, pour tout k entier naturel non nul, $\int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt$.

3) Calculer, pour $t \in]0, \pi]$: $\sum_{k=1}^n \cos(kt)$ puis déterminer une constante λ telle que,

$$\forall t \in]0, \pi], \quad \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} - \lambda.$$

4) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que, pour toute fonction ψ de classe C^1 sur l'intervalle $[0, \pi]$ nous avons : $\int_0^\pi \psi(t) \sin((n+\frac{1}{2})t) dt \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$.

5) Montrer que $\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$.

PARTIE II

Dans cette partie, pour n entier naturel non nul et x réel, on pose $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

6) Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

a) Montrer qu'il existe $n+1$ entiers $e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}$ tels que $f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} e_i x^i$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel k , $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ sont des entiers.
(On pourra remarquer que $f_n(x) = f_n(1-x)$).

On veut montrer que π^2 est irrationnel, et on va **raisonner par l'absurde** : on suppose que $\pi^2 = \frac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

7) On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :

$$F_n(x) = b^n(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)).$$

a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

b) On pose, pour n entier naturel non nul et x réel : $g_n(x) = F'_n(x) \sin(\pi x) - \pi F_n(x) \cos(\pi x)$ et $A_n = \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \sin(\pi x) dx$.

Montrer que, pour n entier naturel non nul et x réel : $g'_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x) \sin(\pi x)$ et montrer que A_n est un entier.

8) On pose, toujours pour le même entier a $u_n = \frac{a^n}{n!}$.

a) En considérant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, prouver que la suite (u_n) converge vers 0.

b) Vérifier qu'à partir d'un certain rang $A_n \in]0, 1[$ et conclure que π^2 est irrationnel.

c) Comment peut-on en déduire que π est irrationnel?

Solution :

1) ϕ est C^1 sur $]0, \pi]$ par opérations sur de telles fonctions et $\phi(t) \sim \frac{-t}{t} = -1$ en 0, ϕ est donc continue sur son intervalle de définition.

Pour $t \in]0, \pi]$, $\phi'(t) = \frac{A(t)}{2(\sin t/2)^2}$ avec $A(t) = \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin t/2 - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos t/2$.

On a alors, pour $t \rightarrow 0$, $A(t) = \frac{t^2}{4\pi} + o(t^2)$; par conséquent :

$$\phi'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{1}{2\pi}.$$

Toutes ses hypothèses étant satisfaites, le théorème du prolongement des fonctions C^1 s'applique et donne que ϕ est C^1 sur $[0, \pi]$ □

2) Une double IPP (légitimée par le caractère C^∞ des fonctions présentes) fournit:

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(t) dt = \frac{1}{k^2}, \text{ ce pour tout entier naturel non nul } k \square$$

3) C'est du classique de première année. On calcule d'abord $S = \sum_1^n e^{ikt}$ qui se voit comme une somme géométrique de raison $e^{it} \neq 1 (t \in]0, \pi])$.

$$\text{Ainsi } S = e^{it} \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1}.$$

La somme à calculer $T = \operatorname{Re}(S) = \cos(t/2) \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}$, ce en passant à l'arc moitié dans la formule précédente.

Puis sachant que $\cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2} \times (\sin(a+b) - \sin(a-b))$, il vient :

$$T = \frac{1}{2} \times \frac{\sin(n+1/2)t - \sin(t/2)}{\sin t/2} = \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2} - 1/2.$$

$$\text{On propose donc } \lambda = \frac{1}{2} \square$$

4) C'est encore un classique de première année, connu sous le nom de lemme de Riemann-Lebesgue. Sera détaillé en classe lundi après-midi.

5) Pour $n \geq 1$, posons $S_n = \sum_1^n \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt = \int_0^\pi \phi(t) \sin(n+1/2)t dt - \frac{\int_0^\pi h(t) dt}{2}$, ce grâce linéarité

de l'intégrale de $\int$ et aux questions 2) et 3).

Puis en utilisant le 4) et la convergence notoire des sommes partielles de la série de Riemann d'exposant 2

vers sa somme (à savoir $\zeta(2)$) et en faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons $\zeta(2) = -\frac{1}{2} \int_0^\pi h(t) dt = \frac{\pi^2}{6}$.

(Simple calcul!) ■

6) a) Simple utilisation du binôme de Newton □

b) On observe tout d'abord que 0 et 1 sont racines de f_n de multiplicité égale à n . Par conséquent les dérivées d'ordre $\leq n-1$ de f_n en 0 et 1 sont nulles donc entières.

Ce résultat est aussi vrai pour les dérivées d'ordre $> 2n$, puisque de telles dérivées sont nulles ($\deg(f_n) = 2n$).

Si $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$, nous disposons (avec a)) de :

$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{2n} e_i \binom{i}{k} \frac{k!}{n!} x^{i-k}$; sous cette forme il est clair que $f_n^{(k)}(0), f_n^{(k)}(1)$ sont des entiers (l'indication donnée par l'énoncé s'avère inutile donc) $\square$

7)a) Résulte de la question précédente et du fait que $b^n \pi^{2n-2k} \in \mathbb{N}$ si $0 \leq k \leq n$ $\square$

b) g_n étant notoirement dérivable sur $\mathbb{R}$, on a:

$\forall x \in \mathbb{R}, g_n'(x) = \sin \pi x (F_n''(x) + \pi^2 F_n(x)) = \pi^2 a^n f_n(x) \sin \pi x$, ce après implification télescopique.

De plus $A_n = \frac{1}{\pi} (g_n(1) - g_n(0)) = F_n(0) + F_n(1) \in \mathbb{Z}$ (par a)) $\square$

8)a) On reconnaît en u_n le terme général d'une série exponentielle, donc convergente. Son terme général tend donc bien vers 0 $\square$

b) Pour tout n (majoration par inégalité triangulaire intégrale) : $|A_n| \leq \pi \frac{a^n}{n!}$ soit par ce qui précède la convergence de la suite (A_n) vers 0.

Il existe donc bien un entier n (remarquer que $A_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale mais ne peut être nul par positivité et non identiquement nullité, continuité de l'intégrande sur $[0, 1]$) à partir duquel $A_n \in]0, 1[$.

Mais ceci est absurde puisque A_n est un entier.

Il en résulte que π^2 donc $\zeta(2)$ sont des irrationnels $\square$

c) Si π était rationnel, π^2 le serait, ce qui ne se peut par b) donc $\pi \notin \mathbb{Q}$ $\blacksquare$

Exercice 4 : (Etude d'une série)

Pour tout entier naturel n non nul on pose : $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $u_n = \frac{(-1)^{a_n}}{\sqrt{n}}$.

a) La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est-elle absolument convergente? alternée? On justifiera ses réponses.

On pose $v_n = u_{4n+1} + u_{4n+2} + u_{4n+3} + u_{4n+4}$, ce pour tout n non nul.

b) Etablir que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

c) On note (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 1} u_n$. Dédurre de la question précédente la convergence de la suite (S_{4n}) .

d) Prouver que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge bien.

Solution :

a) Pour tout $n \geq 1$: $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a affaire à une série de Riemann divergente, donc pas de convergence absolue pour $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Dans le même contexte $u_{4n+1} u_{4n+2} > 0$ donc notre série n'est pas alternée $\square$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -(\frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n+2}}) + (\frac{1}{\sqrt{4n+3}} + \frac{1}{\sqrt{4n+4}})$.

En associant le premier terme au troisième et les deux autres, il vient :

$$v_n = \frac{\sqrt{4n+3} - \sqrt{4n+1}}{\sqrt{4n+3}\sqrt{4n+1}} + \frac{\sqrt{4n+4} - \sqrt{4n+2}}{\sqrt{4n+4}\sqrt{4n+2}}.$$

Avec la quantité conjuguée (plus économique !), on trouve aisément que $v_n = O(\frac{1}{n^{3/2}})$ et montre, par ce biais, que $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge $\square$

c) La suite $(S_{4n})_{n \geq 1}$ étant la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$, elle converge bien $\square$

d) Il nous suffit de montrer que la suite (S_n) converge.

Convenons de noter S la limite de la suite $(S_{4n})_{n \geq 1}$ et vérifions que (S_n) converge vers S .

On observe auparavant que la suite (u_n) converge vers 0 et que $S_n = S_{4q} + \sum_{i=4q+1}^{4q+r} u_i$, où q est le quotient de la division de n par 4 et r le reste; compte tenu des données invoquées, on a bien que $S_n \rightarrow S$ $\blacksquare$

Exercice 5 : (Etude de séries trigonométriques)

Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{\cos^2(n)}{n}$ et $v_n = \frac{\sin^2(n)}{n}$.

a) Montrer que l'une au moins des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ ou $\sum_{n \geq 1} v_n$ doit diverger.

On suppose que $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

b) Etablir successivement que :

i) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n+1)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n-1)}{n}$ convergent.

ii) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n+1) + \sin^2(n-1)}{n}$ converge.

iii) $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge (on explicitera le terme général de la série définie en ii)).

Conclure.

c) Que dire de la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$?

Solution :

a) La somme des termes généraux des séries incriminées donne celui de la série harmonique, série notoirement divergente. Nécessairement une au moins des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ ou $\sum_{n \geq 1} v_n$ doit diverger $\square$

b)i) Les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n+1)}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin^2(n-1)}{n-1}$ convergeant, par principe de comparaison pour les STP, il

en va de même pour $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n+1)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n-1)}{n}$ $\square$

ii) Simple addition de deux séries convergentes $\square$

iii) Avec les formules d'addition du sinus, il vient et pour tout $n \geq 1$: $\frac{\sin^2(n+1) + \sin^2(n-1)}{n} = 2(\cos^2(1)v_n + \sin^2(1)v_n)$.

Comme $\sin(1) \neq 0$, on récupère la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, ce qui est absurde voir a) $\square$

c) Elle diverge aussi pour des raisons analogues $\blacksquare$

Exercice 6 : (Développement en série d'Engel)

On se donne $(q_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante d'entiers strictement supérieurs à 1 et croissante et on pose $u_n = \frac{1}{\prod_{k=0}^n q_k}$.

a) Etablir que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

b) Vérifier que la somme de la série précédente appartient à $]0, 1]$.

c) Prouver que si la suite (q_n) est stationnaire, la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est un nombre rationnel.

d) Montrer la réciproque de l'assertion proposée en c).

Solution :

a) On a pour tout n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$ puisque tous les $q_k \geq 2$.

Par simple comparaison $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\square$

b) On a bien sûr, en notant S la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, $u_0 \leq S \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 1$.

Comme $u_0 > 0$, le résultat voulu en découle $\square$

c) Il existe donc un entier $m \geq 1$ tel que $\forall n \geq m$, $q_n = q_m = q$.

$S = S_{m-1} + \frac{1}{q_0 \dots q_m} \left(\frac{1}{1 - 1/q} \right) \in \mathbb{Q}$ puisque les q_i sont des entiers > 1 $\square$

d) Procédons par l'absurde en posant $S = \frac{p}{q}$, $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Il existe une suite extraite (q_{m_k}) divergeant vers $+\infty$ et pour tout k :

$$S = \frac{p}{q} = \frac{A}{q_0 \dots q_{m_k-1}} + \frac{1}{q_0 \dots q_{m_k-1}} \left(\sum_{j=m_k}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=m_k}^j q_i} \right)$$

Ce qui donne $\frac{B}{q_0 \dots q_{m_k-1}} = \frac{1}{q_0 \dots q_{m_k-1}} \left(\sum_{j=m_k}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=m_k}^j q_i} \right)$ où B est un entier naturel non nul.

Donc après simplification : $\frac{B}{q} \leq \frac{1}{q_{m_k}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{q_{m_k}^p} = \frac{1}{q_{m_k} - 1}$. Non tenable pour tout k puisque le minorant est

> 0 et que le majorant tend vers 0 si $k \rightarrow +\infty$ ■

Exercice 7 : (Nombre de Liouville)

a) Justifier l'existence du réel $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$.

b) En s'inspirant de la preuve de l'irrationalité de e^{-1} , établir celle de α .

c) Généraliser.

Solution :

a) Car terme général, noté u_n , positif et $\leq 2^{-n}$ □

b) Supposons que $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et notons (S_n) la suite des sommes partielles de la série dont α est la somme.

Alors pour tout n : $0 < \alpha - S_n \leq \frac{1}{2^{(n+1)!}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right) = \frac{1}{2^{(n+1)!-1}}$.

Mais $\alpha - S_n = \frac{A_n}{q2^{n!}}$, ce qui montre que cette inégalité est en défaut pour n assez grand □

c) on peut sans dommage remplacer 2 par un entier supérieur ou égal à 2 ■