TD 1 : Séries (I) (Corrigé)

Exercice 1 : (En vrac)
Déterminer la nature des séries de terme général donné ci dessous :
a) $u_n = \ln(\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n+1})$. b) $u_n = \dfrac{1}{n^{1+1/n}})$. c) $u_n = 2^{n^{-1/2}}$. d) $u_n = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(n^2+1)$.
e) $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$. f) $u_n = (\dfrac{n}{n+2})^{n^2}$.
Solution :
c) Série DVG puisque son terme général tend vers 1. e) Dans le doute : on étudie le comportement de $n^\alpha u_n$ dont on prend le logarithme. Ainsi $\ln(n^\alpha u_n) = \alpha\ln(n) + (\ln(n))^2 - n\ln(\ln n)$ diverge vers $-\infty$, ce pour tout α donc en particulier pour $\alpha = 2$ donc par la règle n^α, notre série converge.
g) On réécrit le terme général $u_n = \exp(n^2 \times (-\ln(\dfrac{n+2}{n})) = \exp(-n^2 \times (\ln(1+\dfrac{2}{n}))$.
En utilisant $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ pour $x \to 0$, il vient :
$u_n = \exp(-2n)\exp(O(1)) = O(\exp(-2n))$ (O(1) désigne le terme général d'une suite bornée par définition du O). La série géométrique de raison $exp(-2) \in]0,1[$ convergeant absolument, par principe de comparaison, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge ■

Exercice 2 : (Constante d' Euler)
Montrer que la suite (s_n) où $s_n = \sum\limits_{k=2n}^{5n} \dfrac{1}{k}, n \in \mathbb{N}^*$, converge vers une limite à préciser.
Solution :
Pour tout $n \geq 1$, $s_n = H_{5n} - H_{2n} + \dfrac{1}{2n} = \ln(\dfrac{5}{2}) + v_n$, où (v_n) est une suite convergeant vers 0, ce d'après le développement asymptotique des nombres harmoniques donné dans le cours.
On trouve donc $\ln(\dfrac{5}{2})$ comme limite■

Exercice 3 : (Calcul de somme)
En revenant aux sommes partielles et après avoir vérifié leur convergence déterminer les sommes des séries suivantes .
a) $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(1+\dfrac{2}{n(n+3)})$. b) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{\cos(n)}{2^n}$. c) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$. d) $\sum\limits_{n\geq 0} \arctan(\dfrac{1}{n^2+n+1})$.
Solution :
Le terme général de chaque série se note u_n et S_n en désigne le terme d'indice n de sa suite de sommes partielles.
On rappelle que (en cas d'existence de celle-ci) la limite de la suite (S_n) est, par définition, la somme de la série $\sum u_n$.
a) On a $u_n \sim \dfrac{2}{n^2}$, il en résulte la convergence de notre série.
Pour $n \geq 1$, $u_n = \ln(\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$ et, par propriété du logarithme et télescopage, il vient $S_n = \ln(\dfrac{n+1}{n+3}) + \ln(3)$. De ceci on déduit que la suite (S_n) converge vers $\boxed{\ln(3)}$, ce qui est aussi la somme de notre série.
b) Pour tout n, $|u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$, ceci assure la convergence absolue donc la convergence de notre série.
On observe en outre que $u_n = Re(q^n)$, où $q = \dfrac{\exp(i)}{2}$. Le module de q étant égal à 1/2, la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ converge et on a donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = Re(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n) = Re(\dfrac{1}{1-q}) = \boxed{\dfrac{4-2\cos(1)}{5-4\cos(1)}}$■

Exercice 4 :
Nature de $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{3^n}{\binom{3n}{n}}$.

Solution :
D'Alembert peut séduire et répond à la question. Convergence (4/9 <1)$\blacksquare$

Exercice 5 : (Critère de condensation de Cauchy X)
Soit (u_n) une suite décroissante , convergeant vers 0.Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature. (Raisonner sur les sommes partielles)
En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{((\ln n)^{\beta})n^{\alpha}}$, suivant les réels α et β.
Solution :
Pour ce type d'exercices où nous ne disposons pas d'une expression précise du terme général , il faut s'orienter vers la caractérisation de la convergence des STP via le caractère majoré de la suite des sommes partielles.On notera (S_n) celle de la série $\sum u_n$ et (T_n) celle de la série $\sum 2^n u_{2^{n+1}}$.
Compte tenu de la décroissance de (u_n) : $\forall n, 2^n u_{2^{n+1}} \leq \displaystyle\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_k \leq 2^n u_{2^n}$; ce qui implique :
$\forall N, \displaystyle\sum_{n=0}^{N} 2^n u_{2^{n+1}} \leq \sum_{n=2}^{2^{N+1}} u_n \leq T_N$ ou $\dfrac{1}{2}(T_{N+1} - u_0) \leq S_{2^{N+1}} - u_0 - u_1 \leq T_N$.
Procédons alors par double implication.
i) $\sum u_n$ CV $\Rightarrow (S_n)$ majorée donc avec ce qui précède (T_n) majorée et $\sum 2^n u_{2^{n+1}}$ CV.
ii) $\sum 2^n u_{2^{n+1}}$ CV$\Rightarrow (T_n)$ majorée$\Rightarrow (S_{2^{N+1}})$ majorée mais comme $(S_n) \nearrow, (S_n)$ est aussi majorée et $\sum u_n$ CV.
Bilan : $\sum u_n$ CV$\Leftrightarrow \sum 2^n u_{2^{n+1}}$ CV$\square$
En appliquant la caractérisation précédente, il y a convergence ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$$\blacksquare$

Exercice 6 :
Soient (u_n) une suite de réels positifs et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.
Solution :
Supposons que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $u_n \to 0$ et $\dfrac{1}{1+u_n} \to 1$ et ainsi $u_n \sim v_n$ donc, par comparaison des STP, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge aussi $\square$
On observe que, pour tout n, $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$ donc en supposant cette fois que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, on obtient de façon analogue que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge$\blacksquare$

Exercice 7 :
Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes positifs convergente.
Que dire des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$?
Solution :

Exercice 8 : (Lien suite - série)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, pour tout n.
Nature de la série de terme général u_n^2?

Exercice 9 : (Comparaison série-intégrale).
On se donne un réel $\alpha > 1$ et on note (R_n) la suite des restes de la série de Riemann d'exposant α.
Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} R_n$.
Solution :

On pose pour $x \geq 1$, $f(x) = x^{-\alpha}$. Cette fonction est continue, positive et décroissante sur son intervalle de définition.
Par considération d'aires découlant de la décroissance de f, il vient :
$\int_n^{n+1} f \leq f(n) = u_n \leq \int_{n-1}^{n} f$, ce pour tout $n \geq 1$ en ce qui concerne la minoration et pour tout $n \geq 2$ concernant la majoration. On se donne alors des entiers supérieurs à 2 m et $N \geq m+1$ (par sommation des inégalités précédentes entre $m+1$ et N) on a (Chasles) :
$\int_m^{N+1} f \leq \sum_{n=m+1}^{N} u_n \leq \int_{m-1}^{N} f.$
Soit en explicitant les intégrales (et avec des notations classiques) :
$\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_m^{N+1} \leq S_N - S_n \leq \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{m-1}^{N}.$
Puis, en faisant tendre N vers ∞ et par conservation des inégalités à la limite ($1-\alpha < 0$!) :
$\frac{m^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq R_m \leq \frac{(m-1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ ou $\frac{1}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}} \leq R_m \leq \frac{1}{(\alpha-1)(m-1)^{\alpha-1}}$.
Bilan et par comparaison des STP : si $\alpha \leq 2$, $\sum_{n\geq 1} R_n$ diverge et elle converge dans le cas contraire■

Exercice 10 :
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs divergente dont (S_n) désigne la suite des sommes partielles.
Nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{S_n}$ et de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{S_n^2}$.
Solution :
i) On pose $v_n = \frac{u_n}{S_n}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, ce pour tout n.
Pour tout couple d'entiers naturels (n,p) : $T_{n+p} - T_n \geq \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}}$ (en vertu de la croissance de la suite (S_m)) ou $T_{n+p} - T_n \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$.
Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors la suite (T_n) possède une limite finie et ainsi, il existe un entier n tel que pour tout p, on ait $T_{n+p} - T_n \leq 1/2$ donc $1/2 \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$; il suffit alors de faire tendre p vers $+\infty$ pour obtenir (on rappelle que la divergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$ équivaut à la divergence vers $+\infty$ de la suite (S_m)) $1/2 \geq 1$. Ce qui n'est pas tenable donc, par l'absurde, $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge □
ii) On pose $v_n = \frac{u_n}{S_n^2}$, la décroissance de la fonction $x \to 1/x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la croissance de la suite (S_n) donne (par considération d'aires cf comparaison série-intégrale) :
$\frac{S_{n+1} - S_n}{S_{n+1}^2} \leq \int_{S_n}^{S_{n+1}} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$. Le lien suite-série et le principe de comparaison pour les STP permettent alors de conclure à la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$■

Exercice 11 : Problème de synthèse

Hypothèses

$\sum u_n$ est une série numérique à termes strictement positifs.

Règle de Cauchy

$\boxed{1}$ Etablir que si $(u_n)^{1/n} \to L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors :
i) Si $L < 1$, $\sum u_n$ converge .
ii) Si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement .
iii) $L = 1$, on ne peut conclure.

$\boxed{2}$ Comparer cette règle à celle de D'Alembert .

Règle de Raabe/Duhamel

On suppose que , pour $n \to +\infty$, on dispose du DL suivant :
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
En utilisant le test géométrique avec les séries de Riemann , établir :
i) $a > 1, \sum u_n$ converge .
ii) $a < 1, \sum u_n$ diverge.
iii) $a = 1$, on ne peut conclure.
$\boxed{3}$ Déterminer la nature des séries de terme général :
$u_n = \dfrac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6..........(2n)}$ puis $u_n = \dfrac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6..........(2n+2)}$. et , pour $a > 0, u_n = \dfrac{n!}{a(a+1)....(a+n-1)}$
Solution :
1)i) Par définition de la limite , $\exists k \in]0,1[, \exists n_0, \forall n \geq n_0, (u_n)^{1/n} \leq k \Rightarrow \exists k \in]0,1[, \exists n_0, \forall n \geq n_0, u_n \leq k^n$, comme $\sum k^n$ est une série géométrique convergente , par comparaison des séries à termes positifs , $\sum u_n$ converge.
ii) Cette fois : $\exists k > 1, \exists n_0, \forall n \geq n_0, (u_n)^{1/n} \geq k \Rightarrow \exists k > 1, \exists n_0, \forall n \geq n_0, u_n \geq k^n$,par le même type d'argumentation , $\sum u_n$ diverge.
2) Il fallait comprendre par là (et cela avait précisé en classe) que dès que la règle de D'Alembert peut s'appliquer, celle de Cauchy peut aussi s'employer.
Si on suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to L$ alors $\ln(u_{n+1} - \ln(u_n) = v_n \to \ln(L)$ donc en appliquant le lemme de Cesaro à la suite (v_n), on a aussi que $\dfrac{\ln(u_n)}{n} \to \ln(L)$ donc en appliquant le lemme de Cesaro à la suite (v_n), on a aussi que $\dfrac{\ln(u_n)}{n} \to \ln(L)$ soit (en passant à l'exponentielle) que $(u_n)^{1/n} \to L$. Donc dès que D'Alembert permet de trancher, il en va de même de la règle de Cauchy. Cette dernière est même un peu meilleure que la règle de D'Alembert (mais ne permet pas de trancher pour le cas douteux de D'Alembert); il suffit ,par exemple, de considérer la série $\sum u_n$ dont le terme général $u_n = \begin{cases} 2^{-n^2} \text{si} & \text{n = 2p} \\ 3^{-n^2} & \text{sinon} \end{cases}$ (Le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'ayant pas de limite, il suffit d'examiner les suites extraites d'indices pairs et impairs).
3)On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = n^\alpha u_n$ où $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$. Alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^\alpha (1 - \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)) = 1 + \dfrac{\alpha - a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
i) Si $a > 1$, on peut trouver $\alpha > 1$ tel que : $a > \alpha > 1$ et alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \to 1^-$ donc $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0, v_n \leq v_{n_0}$ et $n^\alpha u_n = O(1)$ et , par la règle $n^\alpha, \sum u_n$ converge.
ii) Si $a < 1$,on peut trouver $\alpha < 1$ tel que $a < \alpha < 1$ et alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \to 1^+$ donc $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0, u_n \geq \dfrac{v_{n_0}}{n^\alpha}$ et , par comparaison des séries à termes positifs , $\sum u_n$ diverge.
iii) Posons pour $\alpha > 0, n \geq 2 : u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$alors , pour les mêmes n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} \left(\dfrac{\ln n + \ln(1 + 1/n)}{\ln n}\right)^{-\alpha} = (1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right))(1 + o\left(\dfrac{1}{n}\right))^{-\alpha} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et puisque il peut y avoir convergence ou divergence de $\sum u_n$ suivant le réel α, on ne peut conclure dans le cas où $a = 1$.
4) a) Si $n \to +\infty$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)(1 - \dfrac{1}{n}) + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc , par ii) $\sum u_n$ diverge.
b) Si $n \to +\infty$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{(2n+4)} = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)(1 - \dfrac{2}{n}) + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{3/2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc , par i) $\sum u_n$ converge.
c) Si $n \to +\infty$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{a+n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)(1 - \dfrac{a}{n}) + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{a-1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc si $a > 2, \sum u_n$ converge et si $a < 2$ elle diverge. Regardons si nous pouvons conclure dans le cas $a = 2$; dans ce cas et pour tout n, $u_n = \dfrac{1}{n}$ donc DV.