Séance du 10/09 (Corrigé)

Exercice 1 : (En vrac)
Déterminer la nature des séries de terme général donné (et noté u_n) ci dessous :

a) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$ (ind : DL et équivalent).

b) $\exp(-\sqrt{\ln(n)})$ (Minoration).

c) $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si n n'est pas un carré parfait} \\ \dfrac{1}{n} & \text{sinon.} \end{cases}$.

(ind : Majorer les sommes partielles en utilisant $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$).

d) $u_n = \ln(\tanh(n))$ (ind : équivalent).
Solution :
On rappelle deux points :
$\boxed{\tanh(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 1}$.
$\boxed{\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} t-1}$.
Dès lors puisque $\tanh(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, $u_n \sim (\tanh(n)-1 = -\dfrac{2e^{-n}}{e^n+e^{-n}}$ (en utilisant l'exponentielle pour exprimer les fonctions hyperboliques).
Finalement $|u_n| \sim 2(e^{-2})^n$. La série géométrique $\sum_{n\geq 0}(e^{-2})^n$ convergeant (raison strictement comprise entre 0 et 1), il en résulte que notre série ACV donc CV$\blacksquare$
e) $(1+\dfrac{1}{n})^n - e$ (ind : DL et équivalent).
$(1+\dfrac{1}{n})^n = \exp(n\ln(1+1/n)) = \exp(1-1/2nO(1/n^2)$ donc $u_n = e(\exp(-1/2nO(1/n^2)-1)$.
En utilisant l'équivalent usuel (en 0) $e^x-1 \sim x$, il vient $u_n \sim \dfrac{-e}{2n}$, ce qui, par comparaison des séries de signe constant APCR, montre la divergence de notre série$\blacksquare$

Exercice 2 : (CCP)
Nature de $\sum_{n\geq 0} \dfrac{a^n}{1+b^n}$ où a et b sont des réels strictement positifs? (Chercher un équivalent du terme général).
Solution :
$u_n \sim \begin{cases} a^n & \text{si b} < 1 \\ \dfrac{a^n}{2} & \text{si b} = 1 \\ (\dfrac{a}{b})^n & \text{sinon} \end{cases}$.
Il en résulte qu'il y a convergence si et seulement si $\boxed{a<1 \text{ et } b\geq 1 \text{ ou } a<b \text{ et } b\geq 1}$$\blacksquare$

Exercice 3 : (Classique Oral Mines)
Nature de la série de terme général $u_n = a\sqrt{n+2}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n}$ avec a, b, c réels . Calcul de la somme dans le cas de convergence.
(ind : Développement asymptotique du terme général).

Exercice 4 : (Centrale)
Nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^{kn}}, k > 0$.
(ind : D'Alembert).
Solution :
Comme la série est à termes strictement positifs, on peut penser à la règle de d'Alembert.
On a, pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)^{1-k}(1+1/n)^{-kn}$.
Comme (cf exercice 1 e)), $(1+1/n)^n \to e$, nous obtenons : i) si $k > 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0 < 1$
ii) si $k = 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to e^{-k} < 1$ (car $k > 0$)
iii) si $k < 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to +\infty > 1$
La série en jeu converge ssi $\boxed{k \geq 1}$ ■

Exercice 5 : (Convergence d'une suite ?)
Etude de la convergence de la suite (v_n), où, pour tout n :
$u_n = \sum_{k=1}^{n} \cosh(\frac{1}{\sqrt{n+k}}) - n$.
Solution :
On va utiliser le lien suite-série en posant $v_n = u_{n+1} - u_n$, ce pour tout n.
Un travail simple de changement d'indice montre que, ce pour tout n :
$v_n = \cosh(\frac{1}{\sqrt{2n+2}}) + \cosh(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}) - \cosh(\frac{1}{\sqrt{n+1}}) - 1$.
Comme $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ pour $x \to 0$, on obtient :
$v_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}) + O(1/n^2)$ ou (après réduction au même dénominateur)
$v_n = O(1/n^2)$. Par comparaison la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge et, par le lien suite-série, la suite (u_n) converge bien■