
TD 2 : Séries (II) . Corrigé final

On note u_n le terme général des séries à étudier si ce n'est pas spécifié.

Exercice 1 : (Navale)

Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}, \alpha > 0?$ (ind : DL)

Solution :

$|u_n| \sim \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ donc ACV ssi $\alpha > 2$.

Pour les cas restants, on réorganise l'expression de u_n : $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-1/2}$.

En utilisant le DL_1 de $x \rightarrow (1+x)^{-1/2}$, il vient : $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}\right).$ (*)

Comme $\alpha > 0$, la série (de Riemann alternée) $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ converge et ainsi $u_n - \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} = v_n$ est le TG d'une série de même nature que $\sum u_n$.

Or (*) montre que $v_n \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}$, par principe de comparaison des séries à termes de signe constant APCR, il y a donc convergence ssi $\alpha > 2/3$ ■

Exercice 2 : (CCP Banque)

Nature de $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)?$

Exercice 3 : (Type CCP)

Que dire d'une série de terme général: $\frac{(-1)^n}{n^{1/3}} + \frac{2}{n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{5/3}}\right)?$

Exercice 4 : (CCP Banque)

Pour x, α réels ,étudier la nature de $\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n^\alpha}$.

Solution :

Pour $x < 0$ ou ($x = 0$ et $\alpha \leq 0$), cette série diverge grossièrement. Elle est semi-convergente si $x = 0$ et $0 < \alpha \leq 1$ et ACV dans tous les autres cas ■

Exercice 5 : (Etude d'une série semi-convergente)

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{\cos(2n\pi/3)}{n}$ et $v_n = u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}$.

0) $\sum u_n$ est-elle absolument convergente?

1) Prouver que $\sum v_n$ converge.

On note, pour $n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

2) Dédurre de 1) que $(S_{3n})_{n \geq 1}$ converge. Prouver que $(S_{3n+i})_{n \geq 0}$ convergent aussi vers la même limite, notée L , que $(S_{3n})_{n \geq 1}$. Que peut-on en déduire?

3) En revenant à la définition de u_n et à l'aide de télescopage, exprimer S_{3n} en fonction des sommes partielles de la série harmonique. Déterminer alors L .

Solution :

0) Pour tout $n \geq 1$: $|u_n| \geq \frac{1}{2n}$; ce qui interdit la convergence absolue.

1) Pour tout $p \geq 0$: $v_{p+1} = \frac{1}{3p} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2} \right) = \frac{9p+4}{12p+54p^2+54p^3} \sim \frac{1}{6p^3}$ □

2) Pour tout $n \geq 1$: $S_{3n} = \sum_{p=1}^n v_p$; (S_{3n}) converge bien puisque $\sum v_p$ est une série convergente.

Puisque la suite (u_n) converge vers 0, les suites extraites $(S_{3n+1}), (S_{3n+2})$ convergent vers la même limite

que (S_{3n}) . C'est un exercice classique de sup qui permet alors d'affirmer que (S_n) converge ■

3) On peut écrire $v_p = \frac{3/2}{3p} - \frac{1}{2}(\frac{1}{3p-1} + \frac{1}{3p-2} + \frac{1}{3p})$ pour tout p entier naturel non nul. Ainsi $S_{3n} = \frac{1}{2}(H_n - H_{3n}) = \frac{1}{2}(\ln n + \gamma - \ln(3n) - \gamma) + o(1)$. En passant à la limite sur n , nous obtenons $L = -\frac{\ln 3}{2}$ ■

Exercice 6 : (Mines)

Nature de $\sum \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+4}} \right)$?

Solution :

On peut observer en préambule que cette série n'est pas grossièrement divergente (puisque $\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+4}} \rightarrow 1$).

De plus $u_n = \ln(\sqrt{n} + (-1)^n) - \ln(\sqrt{n+4}) = \frac{\ln(n)}{2} + \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) - \frac{\ln(n)}{2} - \ln(1 + 4/n)$.

En utilisant le fait que $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ si $x \rightarrow 0$, il vient $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - 4/n + O(1/n^2)$.

Le TG se présente comme la somme d'un TG d'une série convergente (alternée CV + ACV) et d'un TG d'une série DV (Riemann) donc notre série diverge ■

Exercice 7 : (Produit de Cauchy)

On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et on prend $u_0 = 0$.

Montrer que le produit de Cauchy de cette série par elle-même est une série grossièrement divergente.

Solution : Notons v_n le terme général de ce produit de Cauchy; on obtient $v_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$,

pour tout n . On a donc, dans le même contexte, $|u_n| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - 1/n$ (en minorant chaque terme de la somme par $1/n$); cette minoration interdit bien à la suite (u_n) de converger vers 0 ■

Exercice 8 : (Somme d'une série)

Pour tout n : $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{n-p}}{(p+1)(p+2)(n-p)!}$.

- 1) Prouver que $\sum u_n$ converge absolument.
- 2) En déterminer la somme.

Solution : On pose $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, pour tout n .

Ces deux séries sont notoirement absolument convergentes et de somme respective 1 et e^{-1} .

Dès lors puisque $\sum u_n$ est le produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$, elle est aussi absolument convergente et sa somme est le produit $1 \times e^{-1} = e^{-1}$ ■

Exercice 9 : (X)

- a) Existe-t-il une série à termes complexes $\sum u_n$ convergeant mais telle que $\sum u_n^3$ diverge.
- b) Même question avec séries à termes réels.

Solution :

En utilisant la méthode employée dans le début de l'exercice 5 (questions 1) et 2), on prouve que la série à termes complexes $\sum_{n \geq 1} \frac{j^n}{n^{1/3}}$, où $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ converge.

a) On pose pour tout $n \geq 1$: $u_n = \frac{j^n}{n^{1/3}}$. Alors $u_n^3 = \frac{1}{n}$. La réponse est donc OUI □

b) Oui encore en posant $n \geq 1$: $u_n = \frac{\cos(2n\pi/3)}{n^{1/3}}$: alors (simple linéarisation : $\cos^3(x) = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$ pour x réel) $\sum u_n^3$ diverge en vertu de l'exercice 5 et de la divergence de la série harmonique ■

Exercice 10 : (ENS)

Nature de la série dont le terme général est le reste d'ordre n de la série harmonique alternée?