$\boxed{\text{Correction partiel 3}}$ ST

Exercice 1 :

1°) $I = \int_{-1}^{1} t^2+1 \, dt = \left[\frac{t^3}{3}+t\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}+1-\left(\frac{-1}{3}-1\right) = \frac{8}{3}$

2°) $J = \int_0^{\pi/2} x\cos x \, dx \qquad u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos x \qquad v(x) = \sin x$

$J = \left[x \sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$

Exercice 2

$\boxed{A}$ $u_0 = 1 \qquad u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n)$

1°) $f : x \longmapsto \frac{1}{10} x (20-x)$

1-a) $f(x) = 2x - \frac{1}{10}x^2$ donc $f'(x) = 2 - \frac{2}{10}x = 2 - \frac{1}{5}x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10.$

1-b) On a donc

x	$-\infty$	10	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Var° de f	$\nearrow$	10	$\searrow$

car $m = -\frac{1}{5} < 0$

$f(10) = 10.$

2- On pose P_n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

Initialisation : $u_0 = 1 \qquad u_1 = \frac{1}{10} \times 1 \times 19 = \frac{19}{10} = 1{,}9$

on a $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$ donc P_0 est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n vraie

ainsi $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10)$) f crois. sur $[0,10]$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$ donc P_{n+1} vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ d'après le principe de récurrence

3°) Donc (u_n) est croissante et majorée par 10 donc elle converge vers $\ell \leq 10$

4°) $f(x) = x \Leftrightarrow 10x = x(20-x) \Leftrightarrow x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 10.$

or f continue en 10 donc $\ell = 10$ car $u_0 = 1 > 0$. donc $\ell \neq 0$.

$\boxed{B}$ (E) : $y' = \frac{1}{20} y(10-y)$

1°) a) y solution de E qui ne s'annule pas. $\iff$ $y' = \frac{1}{20} y(10-y) = \frac{1}{2} y - \frac{1}{20} y^2$

On pose $z = \frac{1}{y}$

$\iff \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{2}\frac{y}{y^2} - \frac{1}{20}\frac{y^2}{y^2}$

Ainsi $-z' = \frac{1}{2} z - \frac{1}{20} \iff$ $z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}$ (E_1).

1°) b) $S_1 = \left\{ x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10},\ k \in \mathbb{R} \right\}$ sont les solutions de (E_1)

Ainsi $S = \left\{ x \longmapsto \frac{1}{ke^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{10}},\ k \in \mathbb{R} \right\}$ sont les solutions de E.

avec $\frac{1}{ke^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{10ke^{-x/2} + 1}$

2°) g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \frac{10}{9 \times e^{-x/2} + 1}$ est bien solution de (E) $(k = 0{,}9)$ et $g(0) = \frac{10}{10} = 1$

donc g est la fonction recherchée.

3°) $g'(x) = \frac{1}{20} g(x)\left(10 - g(x)\right)$ or $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $10 - g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $10 - g(x) = 10\left(1 - \frac{1}{9e^{-x/2}+1}\right) = 10\left(\frac{9e^{-x/2} + \cancel{1} - \cancel{1}}{9e^{-x/2}+1}\right) > 0$

Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

4°) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x/2} = 0$ donc par opérations sur les limites,

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 10$

Ainsi, le nombre de foyers équipés d'une TV à écran plat va approcher les 10 millions au cours du temps.

Exercice 3

(E) $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$

1°) $(-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i)(-i) + 17i = \cancel{i} - (\cancel{-8}+\cancel{i}) - (\cancel{17}-\cancel{8i})i + \cancel{17i}$

$= 0.$

Donc $\boxed{(-i) \text{ est une solution de } (E)}$

2)

	1	$-8+i$	$17-8i$	$17i$
$-i$		$-i$	$8i$	$-17i$
	1	-8	17	0

Donc $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

3°) $(z+i)(z^2-8z+17) = 0 \Leftrightarrow z+i=0$ ou $z^2-8z+17=0$

$\Delta = 64-68 = -4$

$\Leftrightarrow z=-i$ ou $z = \dfrac{8-2i}{2}$ ou $z = \dfrac{8+2i}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{z=-i \text{ ou } z = 4-i \text{ ou } z = 4+i}$

Exercice 4 – QCM

1°) d 2°) c 3°) c 4°) b 5°) b