$\boxed{\text{Correction partiel 3}}$ - Série générale

Exercice 1

A $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{3e^{x/4}}{2+e^{x/4}}$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3e^{x/4}}{2+e^{x/4}} \overset{\div e^{x/4}}{=} \dfrac{3}{2e^{-x/4}+1}$

b) en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x/4} = 0$ donc par opérations, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

en $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x/4} = 0$ donc par opérations, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

c) $f'(x) = -\dfrac{3\times -\frac{1}{4}2e^{-x/4}}{(2e^{-x/4}+1)^2} = \dfrac{3/2\, e^{-x/4}}{(2e^{-\frac{x}{4}}+1)^2}$ or $\left(2e^{-\frac{x}{4}}+1\right)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$

et $\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{4}} > 0$ aussi

Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
Variation de f	0	$\nearrow$ 1	3

B 1°) (E_1) : $y' = \frac{1}{4}y$

a) Les solutions de (E_1) sont les fonctions $f_k : x \mapsto k e^{x/4}$ où $k \in \mathbb{R}$

b) g est solution de (E_1) et $g(0) = 1$

$\iff k e^{0/4} = 1 \iff k = 1$

donc $g : x \mapsto e^{x/4}$

c) La population dépassera 300 rongeurs si $e^{x/4} \geq 3$

$\iff \frac{x}{4} \geq \ln(3)$

$\iff x \geq 4\ln(3) = \ln(81) \simeq 4{,}4$

donc au cours de la 5e année.

2°) (E_2) : $\begin{cases} u' = \frac{1}{4}u\left(1-\frac{1}{3}u\right) \\ u(0) = 1 \end{cases}$

a) u vérifie (E_2) $(u>0)$ $\iff \underset{u(0)=1}{u' = \frac{1}{4}u\left(1-\frac{u}{3}\right)} = \frac{1}{4}u - \frac{1}{12}u^2$

$\iff \dfrac{u'}{u^2} = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{12}$ et $u(0) = 1$

$\iff -\dfrac{u'}{u^2} = -\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{12}$ si on pose $h = \dfrac{1}{u}$ $\quad h(0) = \dfrac{1}{u(0)} = 1$

$\iff h' = -\frac{1}{4}h + \frac{1}{12}$ et $h(0) = 1$

$\iff h$ vérifie (E_3)

b) Solution de (E_3) : (E_3') homogène est $y' = -\frac{1}{4}y$ donc $\mathcal{S}_{(H)} = \{x \mapsto k e^{-x/4}, k \in \mathbb{R}\}$

une solution particulière de (E_3) est $x \mapsto \frac{1}{3}$

donc $\mathcal{S}_3 = \left\{ x \mapsto k e^{-x/4} + \frac{1}{3}, k \in \mathbb{R} \right\}$

donc la solution de (E_3) telle que $h(0) = 1 \Leftrightarrow k e^0 + \frac{1}{3} = 1$

Donc $h : x \mapsto \frac{2}{3} e^{-x/4} + \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$

Ainsi $u : x \longmapsto \dfrac{1}{\frac{2}{3}e^{-x/4} + \frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2e^{-x/4} + 1} = f(x)$ de la partie $\boxed{A}$

c) D'après l'étude de la partie 1, comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

la population tendra vers 300 individus au cours du temps.

<u>Exercice 2</u> $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $n \geq 1$

$x \longmapsto x^n e^x$ $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx.$

1°) a) $F_1(x) = (x-1)e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_1'(x) = (x-1)e^x + 1 e^x = x e^x = f_1(x)$ donc F_1 est une primitive de f_1

b) $I_1 = F_1(1) - F_1(0) = 0 - (-1e^0) = 1$

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$ $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx - \int_0^1 x^n e^x \, dx$

par linéarité, en factorisant

$= \int_0^1 x^n e^x (x-1) \, dx$

or $\forall x \in [0,1]$, $\left.\begin{array}{l} x^n e^x \geq 0 \\ \text{et } x-1 \leq 0 \end{array}\right\}$ donc $x^n e^x (x-1) \leq 0$

Par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leq 0$ donc (I_n) est décroissante.

De même, comme $x \in [0,1]$, $f_n(x) \geq 0$ donc $I_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ainsi (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers $L \geq 0$

3°) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx$ on pose $u(x) = x^{n+1}$ $v'(x) = e^x$

$u'(x) = (n+1)x^n$ $v(x) = e^x$

Par IPP, $I_{n+1} = \left[x^{n+1} \times e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n e^x \, dx = e - (n+1) I_n$.

4°) $I_1 = 1$ et $I_2 = e - 2I_1 = e - 2 \simeq 0{,}718$

5°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$ $x^n \geqslant 0$

et $1 \leqslant e^x \leqslant e$ donc $0 \leqslant x^n \leqslant e^x x^n \leqslant e \times x^n$

donc par positivité de l'intégrale $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 e\, x^n\,dx = e \int_0^1 x^n\,dx$

6°) on $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$

on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ donc par théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 3

A (E) $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$

1°) $(-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i)(-i) + 17i = i + (-8+i)(-1) - (17-8i)\times i + 17i$

$= i + 8 - i - 17i + 8i^2 + 17i = 0$

donc $(-i)$ est une solution de (E)

2°) on peut utiliser un tableau de Hörner pour factoriser le polynôme :

	1	$-8+i$	$17-8i$	$17i$
$(-i)$		$-i$	$8i$	$-17i$
	1	-8	17	0

Donc $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

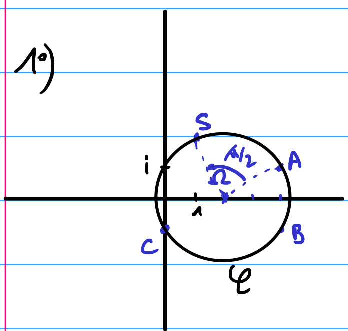
3°) $(z+i)(z^2-8z+17) = 0 \iff z = -i$ ou $z^2 - 8z + 17 = 0$

$\Delta = 64 - 68 = -4 = (2i)^2$

$\iff z = -i$ ou $z = \frac{8-2i}{2} = 4 - i$ ou $z = \frac{8+2i}{2} = 4 + i$

$\mathcal{S} = \{-i\,;\,4-i\,;\,4+i\}$

B 1°)



$A(\overset{a}{4+i})$ $B(\overset{b}{4-i})$ $C(\overset{c}{-i})$ $\Omega(\overset{\omega}{2})$

2°) $S(s)$ est l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega S}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\iff \frac{s-\omega}{a-\omega} = i \iff s = i(a-\omega) + \omega = i(2+i) + 2 = 1 + 2i$

3). On remarque que $a+c=4$ donc $\omega = \frac{a+c}{2}$ donc Ω est le milieu de [AC].

- On a $\Omega S = \Omega A$ par définition de S.
- $|b-\omega| = |2-i| = \sqrt{5}$ et $|a-\omega| = |2+i| = \sqrt{5}$

Donc A, B, C et S sont sur le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$

4) $M(z) \longmapsto M'\left(z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}\right)$

4a) $A(4+i) \longmapsto A'\left(a' = \frac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2}\right)$ donc $a' = \frac{9+2i}{2+i} = \frac{(9+2i)(2-i)}{5} = \frac{20-5i}{5} = 4-i$

$B(4-i) \longmapsto B'\left(b' = \frac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2}\right)$ donc $b' = \frac{11+2i}{2-i} = \frac{(11+2i)(2+i)}{5} = \frac{20+15i}{5} = 4+3i$

$C(-i) \longmapsto C'\left(c' = \frac{i(-i)+10-2i}{-i-2}\right)$ donc $c' = \frac{11-2i}{-2-i} = \frac{(11-2i)(-2+i)}{5} = \frac{-20+15i}{5} = -4+3i$

4b) Soit $P(i)$

$PA' = |a'-i| = |4-2i| = 2|2-i| = 2\sqrt{5}$

$PB' = |b'-i| = |4+2i| = 2\sqrt{5}$

$PC' = |c'-i| = |-4+2i| = 2\sqrt{5}$

donc A', B', C' sont sur le cercle de centre P et de rayon $2\sqrt{5}$

4c) soit $z \neq 2$

$$|z'-i| = \left|\frac{iz+10-2i}{z-2} - i\right| = \left|\frac{iz+10-2i-iz+2i}{z-2}\right| = \frac{10}{|z-2|}$$

4d) $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z-2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z'-i| = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow M' \in$ Cercle de centre P et de rayon $2\sqrt{5}$