2/05/2025 Partiel 3 CPES

Prénom : **Nom :** **Techno/Pro**

▶ Exercice 1 /2,5

Calculer les intégrales suivantes, en utilisant une intégration par parties pour la seconde :

1. $I = \int_{-1}^{1} t^2 + 1 \,\mathrm{d}t$
2. $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \,\mathrm{d}x$

▶ Exercice 2 /9,5

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret /4,5

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0 \ ; \ 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x).$$

   (a) Calculer la dérivée de la fonction f.

   (b) Construire le tableau des variations de f sur $[0;20]$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente vers une valeur notée ℓ.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et en déduire la valeur de ℓ.

Partie B : un modèle continu /5

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0 \ ; \ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20} y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0 \ ; \ +\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}.$$

   (b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0 \ ; \ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.
3. Étudier les variations de g sur $[0 \ ; \ +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

▶ Exercice 3 /3

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3+(-8+\mathrm{i})z^2+(17-8\mathrm{i})z+17\mathrm{i}=0.$$

1. Montrer que $-\mathrm{i}$ est solution de (E).
2. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que :

$$z^3+(-8+\mathrm{i})z^2+(17-8\mathrm{i})z+17\mathrm{i}=(z+\mathrm{i})\left(az^2+bz+c\right).$$

3. Déterminer toutes les solutions complexes de (E).

▶ Exercice 4 /5

L'exercice suivant est un Questionnaire à Choix Multiples. Pour chaque question, **une seule réponse est correcte**. Vous entourerez la bonne réponse **directement sur le sujet**. Toute réponse multiple ou absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln\left(x^2+x+1\right).$$

Pour tout nombre réel x strictement positif :

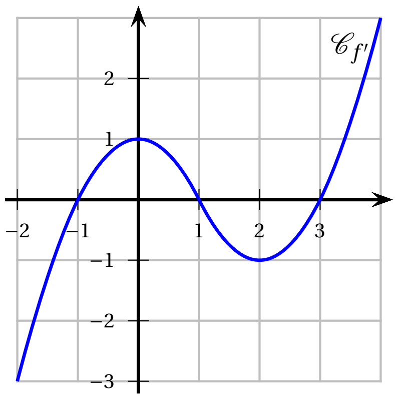
a. $g'(x)=\dfrac{1}{2x+1}$ **b.** $g'(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

c. $g'(x)=\ln(2x+1)$ **d.** $g'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

2. La fonction $x\longmapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction :

a. $x\longmapsto \ln(x)$ **b.** $x\longmapsto \dfrac{1}{x}$ **c.** $x\longmapsto x\ln(x)-x$ **d.** $x\longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

3. On donne ci-dessus **la courbe représentative de la dérivée f'** d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :

a. f est décroissante sur $[0\,;\,2]$ **b.** f est décroissante sur $[-1\,;\,0]$

c. f admet un maximum en 1 sur $[0\,;2]$ **d.** f admet un maximum en 3 sur $[2\,;\,4]$

4. Que vaut : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$?

a. -1 **b.** 1 **c.** $+\infty$ **d.** n'existe pas

5. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).
On sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$ et de plus : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}w_n=3$.
On peut alors affirmer que :

a. la suite (v_n) converge ; **b.** Si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) est minorée par u_0 ;

c. $1\leqslant v_0\leqslant 3$; **d.** la suite (v_n) diverge.