▶ Exercice 1

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}$.

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y' = \frac{y}{4}.$$

   (a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

   (b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t=0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0)=1$.

   (c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_2)\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} = \dfrac{1}{4}u(t)\left(1-\dfrac{1}{3}u(t)\right) \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

   où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

   (a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t)>0$. On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_3)\left\{\begin{array}{lcl} h'(t) & = & -\dfrac{1}{4}h(t)+\dfrac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

   où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

   (b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

   (c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

▶ Exercice 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0~;~1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^x$$

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

1. (a) On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par :

   $$F_1(x) = (x-1)\mathrm{e}^x.$$

   Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1.

   (b) Calculer I_1.
2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. Que peut-on en déduire ?
3. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1 ,

   $$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n.$$

4. Calculer I_2.
5. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

   $$0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x.$$

6. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

▶ Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8+\mathrm{i})z^2 + (17-8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = 0.$$

Partie A : *Résolution de l'équation (E)*

1. Montrer que $-\mathrm{i}$ est solution de (E).
2. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que :

$$z^3 + (-8+\mathrm{i})z^2 + (17-8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = (z+\mathrm{i})\left(az^2 + bz + c\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie B : *Problème géométrique*

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+\mathrm{i}$, $4-\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.
3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$.
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\mathrm{i}z + 10 - 2\mathrm{i}}{z-2}$.
   (a) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.
   (b) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathscr{C}'$ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathscr{C}'$.
   (c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z' - \mathrm{i}|$ en fonction de z.
   (d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathscr{C}$. Démontrer que $\left|z' - \mathrm{i}\right| = 2\sqrt{5}$.
   (e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathscr{C}$.