▶ Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On pose $N = A - I_3$. Calculer N^2, N^3 puis N^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *Penser au binôme de Newton en justifiant.*

▶ Exercice 2

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer les matrices A^2, A^3, A^4, A^5.
2. Conjecturer le résultat de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. Démontrer la conjecture.

▶ Exercice 3 Cas des matrices stochastiques

Partie I Un exemple pour démarrer

Soit $M = \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}24 \\ 0{,}56 & 0{,}76 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer M^n pour $n = 2, 3, 4$ et 5. Quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Vérifier que $M = A + 0{,}2B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ et $B == \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}3 \\ -0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$
3. Calculer AB et BA.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$ et $B^n = B$.
5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = A + 0{,}2^n B$. Conclure

Partie II Généralisation

1. Soient x et y deux nombres réels tels que $x + y = 1$ et soient les matrices $A = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & -x \\ -y & x \end{pmatrix}$.
   Calculer AB et BA.
2. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = A$ et $B^n = B$.
3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix}$ où p et q désignent des nombres réels tels que $p - q \neq 1$.
   Montrer que $M = A + (p-q)B$, où A et B sont des matrices $A = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & -x \\ -y & x \end{pmatrix}$ avec $x = \dfrac{q}{1-p+q}$ et $y = \dfrac{1-p}{1-p+q}$.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = A + (p-q)^n B$.
5. Dans le cas où $|p-q| < 1$, que peut-on dire des coefficients de la matrice M^n lorsque n tend vers $+\infty$?

▶ Exercice 4 Flux entre deux aquariums

Deux aquariums A et B d'un magasin d'aquariophilie sont communicants.
On a constaté que chaque jour, 80% des poissons de l'aquarium A passent dans le B et que 45% de ceux de l'aquarium B passent dans le A.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$; la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la population de poissons dans l'aquarium A et b_n désigne la population de poissons dans l'aquarium B, n jours après le premier jour d'observation.

On suppose que le premier jour d'observation les populations de poissons sont équiréparties entre les deux aquariums.

1. Déterminer la matrice carrée M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
2. Déterminer un état stable pour les flux de circulation des poissons entre les deux aquariums.
3. (a) Vérifier que $M = P - 0{,}25Q$, où $P = \begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}36 \\ 0{,}64 & 0{,}64 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0{,}64 & -0{,}36 \\ -0{,}64 & 0{,}36 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer $P \times Q$ et $Q \times P$.
   (c) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P^n = P$ et $Q^n = Q$.
   (d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = P + (-0{,}25)^n Q$.
   (e) Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n > 0{,}35$. Interpréter ce résultat.

▶ Exercice 5 Suite de Fibonacci et nombre d'or

Partie III Les premiers termes

On considère la suite de nombres réels définis par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Calculer les 20 premiers termes de la suite.
2. Avec la calculatrice, déterminer les premiers termes de la suite des quotients $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Faire une conjecture.
3. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une matrice carrée A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire un procédé de calcul direct de u_{20} en utilisant la calculatrice.

Partie IV Le terme général

1. Vérifier que les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} & \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} & -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.
2. Démontrer que la matrice A est égale au produit des matrices $P \times D \times P^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Partie V Comportement asymptotique

Calculer la limite de la suite (u_n).

▶ Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

1. Soient $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer AX_1, AX_2, AX_3. Que peut-on remarquer ?
2. Soit P la matrice formée par les trois vecteurs colonne (X_1, X_2, X_3). Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. Calculer $P^{-1}AP$
4. En déduire une expression de A^n.

▶ Exercice 7

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \\ w_0 = 3 \end{array}\right.$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 2u_n - v_n - w_n + 1 \\ v_{n+1} = -2u_n + 4v_n - 2w_n + 5 \\ w_{n+1} = -3v_n + 3w_n - 1 \end{array}\right.$. On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

1. Trouver deux matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.
2. On pose $S = I_3 - A$
   (a) Montrer que S est inversible et déterminer S^{-1}
   (b) Montrer qu'il existe un unique vecteur Z tel que $AZ + B = Z$. Le déterminer.
3. On pose $Y_n = X_n - Z$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = A^n Y_0$.
4. Calcul de A^n :
   Soient $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer M^2, L^2, ML et LM.
   (b) En remarquant que $A = M + 2L$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

▶ Exercice 8

On dit qu'une matrice A est *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.
Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $A - I$ est nilpotente et en déduire les puissances de A.
2. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 5u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - 3v_n \end{array}\right.$.
   Donner l'expression des termes généraux u_n et v_n en fonction de n.

▶ Exercice 9

On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices carrées de taille 2 de la forme :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\dfrac{1}{\lambda} & -1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}^*$$

1. (a) Montrer que si A_λ et A_μ sont deux éléments de $\mathcal{M}$, on a :

$$A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda \iff \lambda = \mu.$$

   (b) Montrer que $A_\lambda A_\mu + A_\mu A_\lambda = h(\lambda, \mu) I$, où $h(\lambda, \mu)$ est un nombre réel et I est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $h(\lambda, \mu) = 0$ si et seulement si $\lambda = \mu$.
   que peut-on dire de A_λ^2 ?
   (c) Calculer $\left(A_\lambda + A_\mu\right)^2$.
2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer que :

$$\left(A_\lambda + A_\mu\right)^{2n} = (-1)^n \frac{(\lambda - \mu)^{2n}}{(\lambda\mu)^n} I.$$

   (b) Prouver que $(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2n}$ ne dépend pas de λ.

3. On dit qu'une matrice $\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$ dont les éléments dépendent d'un paramètre x, possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$ s'il existe une matrice $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{array}{ll} \alpha = \lim\limits_{x \to +\infty} a(x) & \beta = \lim\limits_{x \to +\infty} b(x) \\ \gamma = \lim\limits_{x \to +\infty} c(x) & \delta = \lim\limits_{x \to +\infty} d(x) \end{array}.$$

   (a) Montrer que la matrice $C_n = \sum\limits_{p=1}^{n} (A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p}$ a, pour n tendant vers $+\infty$, une limite que l'on calculera.

   (b) Exprimer la matrice $B_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \left(A_p + A_{p+1}\right)^2$.

   (c) Montrer que la matrice B_n a, lorsque n tend vers $+\infty$, une limite que l'on calculera.

▶ Exercice 10

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

1. Calculer A^2. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A^n en fonction de A, I, u_n et u_{n-1}.

▶ Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On note $\mathrm{tr}(A) = a + d$ la *trace* de A et $\det(A) = ad - bc$ le *déterminant* de A.

1. Montrer que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \mathbf{0}$.
2. Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n A + b_n I_2.$$

   On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n, b_n, $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$.

3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \mathrm{tr}(A)a_{n+1} - \det(A)a_n$.
4. **Application** : On suppose ici que $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer A_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Vérifier que la matrice A est inversible. La formule obtenue à la question précédente est-elle valable pour $n = -1$.