Matrices
Opérations et applications

Table des matières

1 Matrices

1.1 Définition

Définition 1.

On appelle *matrice* de taille $m \times n$ un tableau rectangulaire de nombres comportant m lignes et n colonnes

On représente souvent une matrice entre parenthèses, ou crochets.

■ Exemple 1:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0{,}5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 colonnes et 2 lignes, on dit donc qu'elle est de taille 2×3.

NOTATION :
On note $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définition 2 (Cas particuliers).

- Une *matrice ligne* est une matrice qui ne comporte qu'une seule ligne.
- Une *matrice colonne* est une matrice qui ne comporte qu'une seule colonne (c'est un vecteur !).
- Une *matrice carrée* de taille n est une matrice de taille $n \times n$

■ Exemple 2:
Donner une matrice ligne à 3 colonnes, une matrice colonne à deux lignes et une matrice carrée de taille 3.

NOTATION :
L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.2 Écriture générale d'une matrice

Une matrice A de taille $m \times n$ peut s'écrire sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} avec $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ ou $a_{i,j}$ s'il peut y avoir confusion, s'appellent les *coefficients* de la matrice.
On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Le coefficient a_{ij} étant placé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.
Dans une matrice carrée de taille n, on appelle *coefficients diagonaux* les coefficients a_{ii} pour i entre 1 et n.

Définition 3 (Transposée).

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}$, alors la matrice *transposée* de A, qui se note A^t, est la matrice $(a_{ji})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{n,m}$.
Les lignes de A correspondent aux colonnes de A^t.

2 Opérations linéaires

Les matrices vérifient les mêmes règles d'opération/multiplication par un réel que les vecteurs.

2.1 Addition de deux matrices

Définition 4 (Addition).

Si $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ sont deux matrices de même taille $m \times n$, alors on définit la matrice $A+B$ par $A+B = (c_{ij})$ où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

On ajoute « terme à terme ». les matrices doivent être de même taille.

■ Exemple 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0,1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

2.2 Multiplication par un réel

Définition 5 (Multiplication par un réel).

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A = \left(a_{ij}\right)$ alors on peut définir la matrice λA par $\lambda A = \left(d_{ij}\right)$ où tout $d_{ij} = \lambda$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

On multiplie tous les termes.

■ Exemple 4:

$$-2 \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

Ainsi, l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est stable par addition, et par multiplication par un nombre réel (comme les vecteurs).

Remarque 1.

Les règles de priorité sont les mêmes avec les matrices qu'avec les nombres réels, ou les vecteurs :

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ et $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
- On peut donc définir la différence entre deux matrices : $A - B = A + (-1) \times B$.
- L'élément neutre de l'addition dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est la matrice de taille $m \times n$ composée uniquement de 0, on la notera $0_{m,n}$.

3 Multiplication de matrices

On peut également définir le produit de deux matrices.

3.1 Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

À mettre en parallèle avec le produit scalaire entre deux vecteurs.

Définition 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ une matrice ligne et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne, alors on définit

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \cdots + a_{1n} \times b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} \in \mathbb{R}$$

■ Exemple 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 3 \times 2 - 4 \times 0 = 5$$

Pour définir une multiplication entre un vecteur ligne et un vecteur colonne, il faut nécessairement que le premier ait le même nombre de colonnes que l'autre de lignes.

Remarque 2.

Le produit scalaire défini en 1S dans le plan et en TS dans l'espace est un produit matriciel : $\vec{u} \cdot \vec{v} = V^\top \cdot U$, où U et V sont les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés comme des matrices colonnes.

3.2 Multiplication d'une matrice par une matrice colonne

On peut multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ par une matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}$. On obtient alors une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{m,1}$.

Chaque $c_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_k$.

► Exercice 1 **Effet de la multiplication à droite sur les colonnes de la gauche**

Effectuer les produits AB suivants :

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{si } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et si } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

► Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Effectuer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

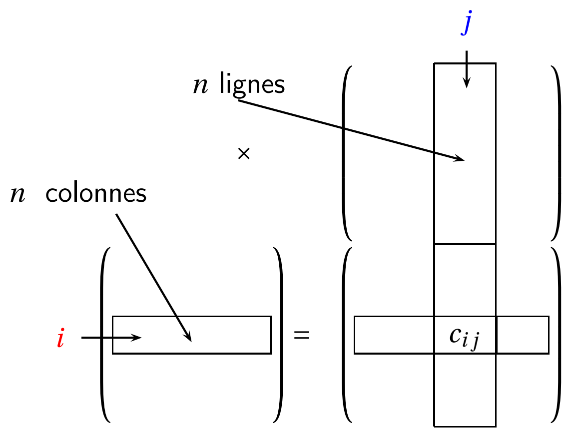
3.3 Cas général

Définition 7 (Produit de deux matrices).

Si $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}$, alors le produit $AB=(c_{ij})$ est la matrice de taille $m\times p$ telle que

$$\forall i\in[\![1;m]\!], \forall j\in[\![1;p]\!] \quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Illustration :



Remarque 3.

Le produit de deux matrices n'est pas commutatif : en général, $AB\neq BA$.

Le vérifier à la main puis à la calculatrice avec $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&4&2\\-1&3&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&3&-1\\0&1&-5\end{pmatrix}$.

On ne peut pas « simplifier » par une matrice de façon brutale, comme on le fait avec les réels. Cela est dû au fait que l'inversion (ou la division) n'est pas une procédure généralisable comme chez les réels.

▶ Exercice 3 Matrices triangulaires

1. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$, où a, b et c sont trois nombres réels.
   (a) Calculer A^2 et A^3.
   (b) Que vaut A^n pour tout entier $n>3$? Le justifier.
2. On se donne $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.
   (a) Écrire A sous la forme $D+T$ où D est une matrice triangulaire et T une matrice strictement triangulaire.
   (b) Vérifier que D et T commutent, puis calculer T^2 et T^3.

(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = 2^n \cdot I_3 + n \times 2^{n-1} \cdot T + 2^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} T^2$$

► Exercice 4

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

   On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

   Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n,
$X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire (par une récurrence immédiate) que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.
   (b) Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1 + 5 \times 0,94^n\right) v_0 + \frac{1}{6}\left(1 - 0,94^n\right) c_0.$$

   Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

3.4 Application aux transformations géométriques

Propriété 1.

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, soient deux points $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;\,y_B\right)$ et soit un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

- B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ si et seulement si $\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
- B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle θ si et seulement si $\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$.

  La matrice $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ est appelée *matrice de rotation de centre O et d'angle θ*.
- L'image du vecteur $\vec{u}$ par la rotation d'angle θ est le vecteur $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

▶ Exercice 5

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ le point $A\left(\sqrt{3};7\right)$.

1. soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$, déterminer les coordonnées de B image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.
2. Donner les coordonnées de C, image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

4 Inversion de matrice carrée et application aux systèmes linéaires

4.1 Inverse d'une matrice carrée

Définition 8.

On appelle *matrice identité de taille n* la matrice notée I_n qui a tous les coefficients nuls, sauf ses coefficients diagonaux, qui sont tous égaux à 1.

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

C'est l'élément neutre de la multiplication :

$$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ A\times I_n=I_n\times A=A$$

■ Exemple 6:

$I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Définition 9.

Étant donnée une matrice **carrée** A de taille n, s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$, alors on dit que la matrice A est *inversible* et que B est la *matrice inverse* de A.

NOTATION :
la matrice inverse de la matrice A est notée A^{-1}.

Méthode d'inversion par le pivot de Gauss

On accole la matrice I à droite de la matrice A et on effectue les opérations du pivot de Gauss pour obtenir la matrice I à gauche. Si A est inversible, alors on obtiendra au final la matrice A^{-1} à droite et la matrice I à gauche.

■ **Exemple 7:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

► Exercice 6

Inverser les matrices suivantes en utilisant le pivot de Gauss :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

4.2 Application aux systèmes

4.2.1 Étude d'un exemple

Considérons le système :

$$(S) \begin{cases} 3x + y = 2 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$$

Appelons X la matrice $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $(S) \iff AX = B$.
2. Donner l'inverse de la matrice A : A^{-1}
3. En déduire la solution du système $AX = B$.

4.2.2 Cas particulier de la taille 2

Propriété 2.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } ad - bc \neq 0}$
($ad - bc$ est appelé le *déterminant* de la matrice A (on note $\det A = ad - bc$)).

Dans ce cas, l'inverse de A est la matrice $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$♡

4.2.3 Cas général

Propriété 3.

Un système linéaire de n équations à n inconnues $x_1, \cdots, x_n$:

$$\left\{\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = y_2 \\ \ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = y_n \end{array}\right.$$

peut s'écrire sous forme matricielle $AX = Y$, où $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et et $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $Y = (y_i) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
La matrice A est inversible si et seulement si le système admet une solution unique $X = A^{-1}Y$.

▶ Exercice 7

On considère le système S: $\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 3 \\ x + y - z & = & -1 \\ -x + y + z & = & 5 \end{array}\right.$

1. Écrire le système sous forme matricielle $AX = Y$
2. Déterminer l'inverse de A.
3. En déduire la solution du système.