Cahier de vacances
MPSI - Mathématiques
Corrigé

I. Calculs

Exercice 1. Simplifier les fractions suivantes.

$a = \dfrac{84}{30}$ $\quad b = \dfrac{9 \times 5^{-2} \times 34}{2^5 \times 21}$ $\quad c = \dfrac{9}{5} - \dfrac{5}{9}$ $\quad d = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}$

$$a = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5} = \frac{14}{5} \qquad b = \frac{3^2 \times 2 \times 17}{2^5 \times 3 \times 7 \times 5^2} = \frac{3 \times 17}{2^4 \times 5^2 \times 7} = \frac{51}{2\,800}$$

$$c = \frac{9^2 - 5^2}{9 \times 5} = \frac{(9-5)(9+5)}{45} = \frac{56}{45} \qquad d = \frac{60 + 30 + 20 + 15 + 12}{60} = \frac{137}{60}$$

Exercice 2. Soit x, y, z trois réels. Simplifier les fractions suivantes, en supposant qu'elles sont bien définies.

$a = \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{x+y}$ $\quad b = \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} + \dfrac{1}{yz}$ $\quad c = \dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ $\quad d = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$

$$a = \frac{(x+y) + (x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x}{x^2 - y^2} \qquad b = \frac{x+y+z}{xyz}$$

$$c = \frac{xyz}{xy + xz + yz} \qquad d = \frac{3x+2}{2x+1}$$

Exercice 3. Comparer (*i.e.*, dire quel est le plus grand) :

$a = \dfrac{7}{6}$ et $a' = \dfrac{6}{7}$ $\quad b = \dfrac{4}{9}$ et $b' = \dfrac{6}{13}$ $\quad c = \dfrac{25}{49}$ et $c' = \dfrac{51}{100}$

$d = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ et $d' = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ avec x réel positif.

$a > 1$ et $a' < 1$ donc $a > a'$.

$$b - b' = \frac{4 \times 13 - 6 \times 9}{9 \times 13} = \frac{2(26-27)}{9 \times 13} = \frac{-2}{9 \times 13} < 0 \quad \text{donc} \quad b < b'.$$

$$c - c' = \frac{25 \times 100 - 51 \times 49}{49 \times 100} = \frac{50^2 - (50+1)(50-1)}{4900} = \frac{1}{4900} > 0 \quad \text{donc} \quad c > c'.$$

$$\begin{aligned} d - d' &= \frac{(x^2+1)^2 - (x^3+1)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{x^4+2x^2+1-x^4-x^3-x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-x(x^2-2x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-x(x-1)^2}{(x+1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

Comme $x > 0$ alors $d - d' < 0$ donc $d < d'$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2 + x - 6 = 0$ b. $x^2 + 3x + 3 = 0$ c. $16x^2 - 8x + 1 = 0$

d. $x^2 + 4x - 7 = 0$ e. $x^2 - 36 = 0$ f. $3x^2 + 8x = 0$

g. $x^2 - \sqrt{13}x + 1 = 0$ h. $x^3 - 5x^2 + 14x = 0$ i. $5x^4 + 7x^2 + 2 = 0$

On note $\mathscr{S}_\mathrm{a}$ l'ensemble des solutions de l'équation a, et ainsi de suite.

$\mathscr{S}_\mathrm{a} = \{2, -3\}$ $\mathscr{S}_\mathrm{b} = \varnothing$ $\mathscr{S}_\mathrm{c} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ $\mathscr{S}_\mathrm{d} = \left\{-2+\sqrt{11}, -2-\sqrt{11}\right\}$

$\mathscr{S}_\mathrm{e} = \{-6, 6\}$ car $x^2 = 36 \iff x = \pm 6$

$\mathscr{S}_\mathrm{f} = \left\{0, -\frac{8}{3}\right\}$ car $3x^2 + 8x = 0 \iff x(3x+8) = 0$
$\iff x = 0$ ou $3x + 8 = 0$

$\mathscr{S}_\mathrm{g} = \left\{\frac{\sqrt{13}-3}{2}, \frac{\sqrt{13}+3}{2}\right\}$

$\mathscr{S}_\mathrm{h} = \{0\}$ car $x^3 - 5x^2 + 14x = 0 \iff x(x^2 - 5x + 14) = 0$

$\mathscr{S}_\mathrm{i} = \varnothing$ car l'équation donne $x^2 = -1$ ou $x^2 = -\frac{2}{5}$.

Exercice 5. Résoudre les inéquations suivantes.

a. $x^2 + 6x - 16 < 0$ b. $4x^2 + 20x + 25 \leqslant 0$ c. $2x^2 + x + 1 \geqslant 0$

a. L'équation $x^2 + 6x - 16 = 0$ admet -8 et 2 pour racines donc $\mathscr{S}_\mathrm{a} =]-8, 2[$.

b. L'équation $4x^2 + 20x + 25 = 0$ admet $-\frac{5}{2}$ pour unique racine donc $\mathscr{S}_\mathrm{b} = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

c. L'équation $2x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de racine donc $\mathscr{S}_\mathrm{c} = \mathbb{R}$.

Exercice 6. Résoudre les équations et le système suivants.

a. $3x^2 - 18x + 24 = 0$ b. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2}$ c. $\begin{cases} x + y = \frac{74}{35} \\ xy = 1 \end{cases}$

a. L'équation équivaut à $x^2 - 6x + 8 = 0$ donc $\mathscr{S}_\mathrm{a} = \{-2, -4\}$.

b. L'équation équivaut à $x^2 - 3x - 4 = 0$ donc $\mathscr{S}_\mathrm{b} = \{-1, 4\}$.

c. x et y sont les solutions de l'équation $X^2 - \frac{74}{35}X + 1 = 0$.

Le discriminant de celle-ci est :

$$\Delta = \left(\frac{74}{35}\right)^2 - 4 = \left(\frac{74}{35} - 2\right)\left(\frac{74}{35} + 2\right) = \frac{4}{35} \times \frac{144}{35} = \left(\frac{2\times 12}{35}\right)^2$$

Les racines sont $\frac{1}{2}\left(\frac{74}{35} \pm \frac{24}{35}\right) = \frac{37\pm 12}{35}$, soit $\frac{7}{5}$ et $\frac{5}{7}$.

L'ensemble des solutions du système est $\mathscr{S}_{\mathrm{c}} = \left\{\left(\frac{5}{7}, \frac{7}{5}\right), \left(\frac{7}{5}, \frac{5}{7}\right)\right\}$.

C'est-à-dire $x = \frac{5}{7}$ et $y = \frac{7}{5}$ ou l'inverse.

Exercice 7. Résoudre les équations :

a. $x^2 + 472x - 473 = 0$ b. $5x^2 + 23x + 26 = 0$

Pour ceci deviner une solution évidente, puis utiliser la somme et le produit.

a. 1 est racine évidente de l'équation, le produit des deux racines est -473, donc l'autre racine est -473, puis $\mathscr{S}_{\mathrm{a}} = \{1, -473\}$

b. -2 est racine évidente de l'équation, le produit des deux racines est $\frac{26}{5}$, donc l'autre racine est $-\frac{13}{5}$, puis $\mathscr{S}_{\mathrm{b}} = \left\{-2, -\frac{13}{5}\right\}$

Exercice 8. Calculer :

$a = 107^2 - 93^2$ $b = \dfrac{101}{99} - \dfrac{99}{101}$ $c = 19^2 + 11^2 + 22 \times 19$ $d = \dfrac{\frac{71}{70} - \frac{1}{141}}{1 + \frac{71}{70\times 141}}$

$a = (107 - 93)(107 + 93) = 6 \times 200 = 1200$

$$b = \frac{101^2 - 99^2}{99 \times 101} = \frac{(101 - 99)(101 + 99)}{9999} = \frac{400}{9999}$$

$c = 19^2 + 2 \times 19 \times 11 + 11^2 = (19 + 11)^2 = 900$

$$d = \frac{71 \times 141 - 70}{70 \times 141 - 71} = \frac{70 \times 141 + 141 - 70}{70 \times 141 - 71} = 1$$

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes.

a. $9x^2 + 6x + 1 = 0$ b. $29x^2 + 29x - x - 1 = 0$ c. $(9x + 7)^2 = (8x + 8)^2$

d. $(5x + 8)^2 = (5x + 8)(2x - 7)$ e. $25x^2 + (5x + 2)(4x + 3) - 4 = 0$

a. $9x^2 + 6x + 1 = 0 \iff (3x + 1)^2 = 0$ donc $\mathscr{S}_{\mathrm{a}} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

b. $29x^2 + 29x - x - 1 = 0 \iff (29x - 1)(x + 1) = 0$ donc $\mathscr{S}_{\mathrm{b}} = \left\{-1, \frac{1}{29}\right\}$

c. $(9x+7)^2 = (8x+8)^2 \iff (9x+7)^2 - (8x+8)^2 = 0$
$\iff (x-1)(17x+15) = 0$ donc $\mathscr{S}_{\text{c}} = \left\{1, -\frac{15}{17}\right\}$

d. $(5x+8)^2 = (5x+8)(2x-7) \iff (5x+8)^2 - (5x+8)(2x-7) = 0$
$\iff (5x+8)(3x+1) = 0$ donc $\mathscr{S}_{\text{d}} = \left\{-\frac{8}{5}, -\frac{1}{3}\right\}$

e. $25x^2 + (5x+2)(4x+3) - 4 = (5x+2)(5x-2) + (5x+2)(4x+3)$
$= (5x+2)(9x+1)$ donc $\mathscr{S}_{\text{e}} = \left\{-\frac{2}{5}, -\frac{1}{9}\right\}$

Exercice 10. Développer les expressions suivantes.

$a = (x-2)^2(x+2)^2$ $b = (x+1)^3$ $c = (x^2+x+1)^2$ $d = (x-1)^4$
$e = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ $f = \left(x+\sqrt{2x}+1\right)\left(x-\sqrt{2x}+1\right)$

$a = (x^2-4)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$ $b = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$c = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ $d = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$
$e = x^8 - 1$ $f = (x+1)^2 - (\sqrt{2x})^2 = x^2 + 1$

Exercice 11. Simplifier les réels suivants.

$a = \sqrt{20}$ $b = 3\sqrt{2} - \sqrt{8}$ $c = \left(2\sqrt{7}\right)^2$ $d = \left(2+\sqrt{3}\right)^2$ $e = \left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4$
$f = \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ $g = \left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right)^2$ $h = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$

$a = 2\sqrt{5}$ $b = \sqrt{2}$ $c = 28$ $d = 7 + 4\sqrt{3}$ $e = 18$
$f = \left|\sqrt{5}-3\right| = 3 - \sqrt{5}$ $g = \frac{14}{5} - \sqrt{3}$ $h = -8\sqrt{3}$

Exercice 12. Simplifier les fractions suivantes.

$a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ $b = \dfrac{1}{\sqrt{18}-\sqrt{12}}$ $c = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ $d = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-1}\right)^2$

$a = 2 + \sqrt{3}$ $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $c = \dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ $d = \dfrac{3(7+2\sqrt{6})}{25}$

Exercice 13. Simplifier les réels suivants.

$a = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$ $\qquad$ $b = \sqrt{x-2\sqrt{x}+1} \times \sqrt{x+2\sqrt{x}+1}$ où $x \geqslant 0$.

$$a = \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-2} = \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)$$

$$b = \sqrt{(x+1)^2-\left(2\sqrt{x}\right)^2} = \sqrt{x^2+1-2x} = |x-1|$$

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes.

a. $|2x-1| = 5$ $\qquad$ b. $|4-3x| = -2$ $\qquad$ c. $|x+1| = |2x-4|$ $\qquad$ d. $(x+5)^2 = |x+5|$

a. $|2x-1| = 5 \iff (2x-1)^2 = 25$
$\iff 4x^2-4x-24 = 0$
$\iff x^2-x-6 = 0 \qquad \mathscr{S}_{\mathrm{a}} = \{-2, 3\}$

b. $|4-3x| > 0$ et $-2 < 0$ donc $\mathscr{S}_{\mathrm{b}} = \varnothing$

c. $|x+1| = |2x-4| \iff (x+1)^2 = (2x-4)^2$
$\iff 3x^2-18x+15 = 0$
$\iff x^2-6x+5 = 0 \qquad \mathscr{S}_{\mathrm{c}} = \{1, 5\}$

d. $(x+5)^2 = |x+5| \iff (x+5)^4 = (x+5)^2$
$\iff (x+5)^2((x+5)^2-1) = 0$
$\iff (x+5)^2(x+4)(x+6) = 0 \qquad \mathscr{S}_{\mathrm{d}} = \{-6, -5, -4\}$

Exercice 15. Résoudre les inéquations suivantes.

a. $|x| \leqslant 4$ $\qquad$ b. $|2x+3| \leqslant 3$ $\qquad$ c. $|x+1| \geqslant 2$ $\qquad$ d. $|1-x| \leqslant |2-x|$

$\mathscr{S}_{\mathrm{a}} = [-4, 4]$ $\qquad$ $\mathscr{S}_{\mathrm{b}} = [-3, 0]$ $\qquad$ $\mathscr{S}_{\mathrm{c}} =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$

$\mathscr{S}_{\mathrm{d}} = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ car $|1-x| \leqslant |2-x| \iff (1-x)^2 \leqslant (2-x)^2 \iff x \leqslant \frac{3}{2}$

II. Notions de base

Exercice 16. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

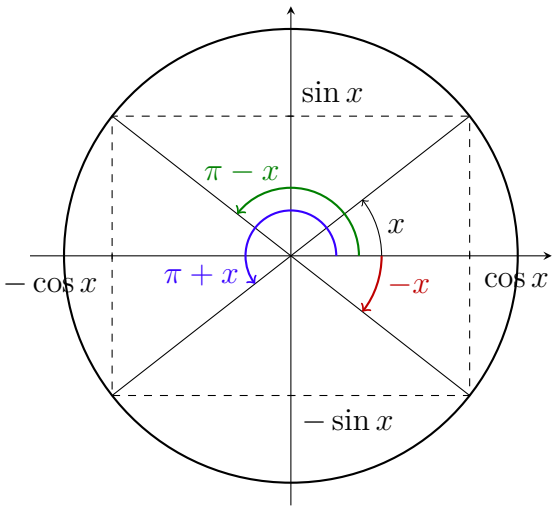
Placer sur le cercle trigonométrique les angles $-x$, $\pi - x$ et $\pi + x$.

Compléter les formules :

$\cos(-x) = \cos x$ $\quad$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$ $\quad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\quad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$

Ceci d'après la figure :



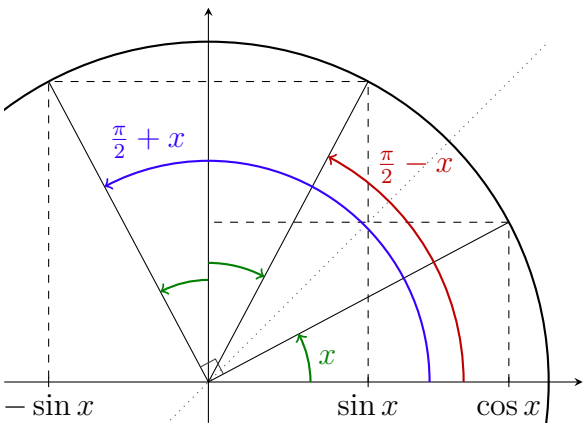
Exercice 17. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Placer sur le cercle trigonométrique les angles $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$.

Compléter les formules :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$



Les formules pour $\frac{\pi}{2} - x$ s'obtiennent par symétrie par rapport à la première bissectrice.

Celles pour $\frac{\pi}{2} + x$ s'obtiennent par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 18. Compléter les formules :

$$\begin{aligned}
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x
\end{aligned}$$

Pour les deux premières on écrit les formules de sommes $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ en remplaçant y par $(-y)$, puis on utilise $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

Par exemple :
$$\begin{aligned}
\cos(x-y) &= \cos(x+(-y)) \\
&= \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) \\
&= \cos x \cos y + \sin x \sin y
\end{aligned}$$

Pour les autres on écrit les formules de sommes en remplaçant y par x.

Par exemple :
$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos(x+x) \\
&= \cos x \cos x - \sin x \sin x \\
&= \cos^2 x - \sin^2 x
\end{aligned}$$

Pour les deux expressions supplémentaires de $\cos(2x)$ on utilise $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Par exemple :
$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\
&= 2\cos^2 x - 1
\end{aligned}$$

Exercice 19.

Compléter :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Exercice 20. Calculer :

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ $\quad \sin\frac{5\pi}{2} = 1$

$\cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad \sin 3\pi = 0$ $\quad \cos\frac{-5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\frac{22\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 9\pi = -1$

$\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ $\quad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ $\quad \tan\frac{3\pi}{4} = -1$ $\quad \tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = 1$

Tout se lit sur le cercle trigonométrique.

On peut aussi utiliser le fait que les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.

Exercice 21. Donner un réel x vérifiant :

a. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d. $\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ e. $\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ f. $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}$

a. $x = \frac{5\pi}{6}$ b. $x = -\frac{\pi}{4}$ c. $x = -\frac{\pi}{6}$

d. $x = -\frac{\pi}{3}$ e. $x = \frac{7\pi}{6}$ (ou $-\frac{5\pi}{6}$...) f. $x = -\frac{\pi}{2}$ (ou $\frac{3\pi}{2}$...)

Exercice 22. Résoudre les équations suivantes.

a. $\sin x = 0$ b. $\cos x = 0$ c. $\cos x = -1$

d. $\cos x = \frac{1}{2}$ e. $\sin x = \frac{1}{2}$ f. $\tan x = 1$

g. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ h. $\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x = \frac{7}{4}$ i. $(\cos x + \sin x)^2 = 1$

$\mathscr{S}_a = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $\mathscr{S}_b = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\mathscr{S}_c = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathscr{S}_d = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\mathscr{S}_e = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\mathscr{S}_f = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

g. Les solutions de l'équation $2X^2 + X - 1 = 0$ sont $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$.

Donc $\mathscr{S}_g = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

$= \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ plus simplement.

h. $\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x = \frac{7}{4} \iff 1 - \cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = \frac{7}{4}$

$\iff \cos^2 - \sqrt{3}\cos x + \frac{3}{4} = 0$

L'équation $X^2 - \sqrt{3}X + \frac{3}{4} = 0$ admet $X_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour unique solution.

Donc $\mathscr{S}_h = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

i. Par équivalences :

$$\begin{aligned} (\cos x + \sin x)^2 = 1 &\iff \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x = 1 \\ &\iff \sin(2x) = 0 \iff 2x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}_i = \left\{k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 23.

a. En utilisant $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$, calculer le cosinus, le sinus et la tangente de $\frac{\pi}{12}$.

b. En utilisant $\frac{\pi}{6} = 2\frac{\pi}{12}$ calculer de nouveau le cosinus, le sinus et la tangente de $\frac{\pi}{12}$.

c. Démontrer que vous avez obtenu les mêmes valeurs.

a. Comme $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ alors les formules de sommes donnent :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Par quotient :

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$$

b. Pour $x = \frac{\pi}{12}$ la formule $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ donne $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

On en déduit $\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Comme $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *i.e.*, $\frac{\pi}{12}$ est dans le premier quadrant du cercle trigonométrique, alors ses cosinus et sinus sont positifs, donc :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Par quotient :

$$\tan\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

c. On constate que :

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2$$

Les nombres $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ sont positifs et ont le même carré, donc ils sont égaux.

De même $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, et $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$.

Exercice 24. Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin 2x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ c. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x + \tan 9x}{\tan 3x + \tan 7x}$

a. Comme $\dfrac{\sin x}{\sin 2x} = \dfrac{\sin x}{2\sin x\cos x} = \dfrac{1}{2\cos x}$ alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\cos x} = \dfrac{1}{2}$.

b. Comme $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x} = 0.$

c. Comme $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

alors $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1+\cos x} = \lim_{x\to \pi} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \pm\infty.$

En fait cette limite n'existe pas, puisqu'elle est différente selon que x tende vers π par valeurs inférieures ou supérieures. La réponse correcte est :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} \pi} \frac{\sin x}{1+\cos x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \underset{>}{\to} \pi} \frac{\sin x}{1+\cos x} = -\infty$$

d. Grâce aux formules de sommes :

$$\frac{\tan x + \tan 9x}{\tan 3x + \tan 7x} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin 9x}{\cos 9x}}{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x} + \dfrac{\sin 7x}{\cos 7x}} = \frac{\sin x \cos 9x + \sin 9x \cos x}{\sin 3x \cos 7x + \sin 3x \cos 7x} \times \frac{\cos 3x \cos 7x}{\cos x \cos 9x}$$

$$= \frac{\sin 10x}{\sin 10x} \times \frac{\cos 3x \cos 7x}{\cos x \cos 9x} = \frac{\cos 3x \cos 7x}{\cos x \cos 9x}$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + \tan 9x}{\tan x + \tan 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x \cos 7x}{\cos x \cos 9x} = 1.$$

Exercice 25. Calculer les nombres complexes suivants.

$a = (3+i)(-2+3i)$ $\quad b = (1-i)^2$ $\quad c = \dfrac{2+i}{3+i}$ $\quad d = \dfrac{(3+4i)(4+3i)}{5+5i}$

$a = -9+7i$ $\quad b = -2i$ $\quad c = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$ $\quad d = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$

Exercice 26. Donner la forme algébrique des complexes suivants.

$a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ $\quad b = 3e^{i3\pi}$ $\quad c = \sqrt{18}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $\quad d = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $\quad e = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$a = \sqrt{3}+i$ $\quad b = -3$ $\quad c = -3-3i$ $\quad d = -i$ $\quad e = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

Exercice 27. Donner une forme exponentielle des complexes suivants.

$a = 3i$ $\quad b = 1+i\sqrt{3}$ $\quad c = 2-2i$ $\quad d = -4$ $\quad e = -3-3i\sqrt{3}$

$a = 3e^{i\pi}$ $\quad b = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad c = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\quad d = 4e^{i\pi}$ $\quad e = 6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 28. Déterminer tous les nombres complexes z tels que :

a. $z^2 = 4$ b. $z^2 = 3 + 4i$ c. $z^2 = -5 - 12i$ d. $z^2 = i$ e. $z^2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

a. $z = 2$ ou $z = -2$.

b. En posant $z = x + iy$ on montre que : $z = 2 + i$ ou $z = -2 - i$.

c. De même : $z = 2 - 3i$ ou $z = -2 + 3i$.

d. On peut procéder de même ou utiliser $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

On obtient $z = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}$ soit $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

e. On obtient $z = \pm e^{-i\frac{\pi}{6}}$ soit $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

Exercice 29.

a. Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques, ou ni l'un ni l'autre.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 7 - 3n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 3$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = (n+1)(n+2)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{4}{3^n}$
5. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + 2n$

b. Donner la somme des termes de u_0 à u_n pour chacune de ces suites.

On pourra utiliser la formule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a. 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison -3.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc arithmétique de raison 0 et géométrique de raison 1.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique ni géométrique. Pour démontrer ceci on calcule $u_0 = 2$, $u_1 = 6$, $u_2 = 12$, puis on vérifie que :

$$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1 \quad \text{et} \quad \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}.$$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

b. On obtient :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{2}(n+1)(14-3n)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = 3(n+1)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = 6 - \frac{2}{3^n}$
5. On remarque que $u_n = 1 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = n^2 + n + 1$.

On peut démontrer ce résultat par récurrence.

On en déduit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{3}(n+1)(n^2+2n+3)$

Exercice 30. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 4$.

a. Déterminer un réel γ tel que : $\gamma = 3\gamma + 4$.

b. Démontrer que la suite $(u_n - \gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

c. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n. Vérifier pour $n = 0$, 1, et 2.

a. On calcule $\gamma = -2$.

b. Par soustraction des égalités $\quad u_{n+1} = 3u_n + 4 \quad$ et $\quad \gamma = 3\gamma + 4 \quad$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (u_{n+1} - \gamma) = 3(u_n - \gamma).$$

Ceci montre que la suite $(u_n - \gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3.

c. On obtient : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 4 \times 3^n - 2$.

d. On obtient : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = 6 \times 3^n - 2n - 4$.

On calcule $u_0 = 2$, $u_1 = 10$, $u_2 = 34$, puis $u_0 + u_1 = 12$ et $u_0 + u_1 + u_2 = 46$, ce qui permet de vérifier la formule pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$.

Exercice 31.

Calculer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n - 1}{2^n}$ b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{n}$ c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\Big(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}\Big)$

a. Comme $\quad \dfrac{4^n - 1}{2^n} = 2^n - \dfrac{1}{2^n} \quad$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n - 1}{2^n} = +\infty$.

b. Comme $\quad \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{n} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n} + \dfrac{\sqrt{n-1}}{n} = \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} + \sqrt{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}}$

alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{n} = 0$.

c. On multiplie par la quantité conjuguée.

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\Big(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}\Big) &= \sqrt{n}\frac{(n+4) - (n+1)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\end{aligned}$$

Ceci montre que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\Big(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}\Big) = \frac{3}{2}$.

Exercice 32. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, positive et majorée par 2.

b. Démontrer qu'elle est croissante.

c. Démontrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

d. Tracer la courbe de la fonction f définie par : $\forall x \in [-2, +\infty[\quad f(x) = \sqrt{x+2}$

Représenter sur le graphe les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation.</u> Comme $u_0 = 0$ alors $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$: la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie : u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Alors $2 \leqslant u_n + 2 \leqslant 4$ donc $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_n+2} \leqslant 2$.

Ceci implique que u_{n+1} est bien défini et $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$: la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

On a démontré que la propriété $\mathscr{P}_n$ implique la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$.

<u>Conclusion.</u> Par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, positive et majorée par 2.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n+2} - u_n = \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n+2} + u_n} = -\frac{u_n^2 - u_n - 2}{\sqrt{u_n+2} + u_n}.$$

Les racines du polynôme $X^2 - X - 2$ sont $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-2)(u_n+1)}{\sqrt{u_n+2} + u_n}.$$

Comme $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$

Ceci montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

Elle est donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone.

Soit ℓ sa limite.

Alors la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ et la suite $(\sqrt{u_n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\ell+2}$.

Comme $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n+2} \quad$ alors $\quad \ell = \sqrt{\ell+2}$.

On en déduit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, soit $\ell = -1$ ou $\ell = 2$.

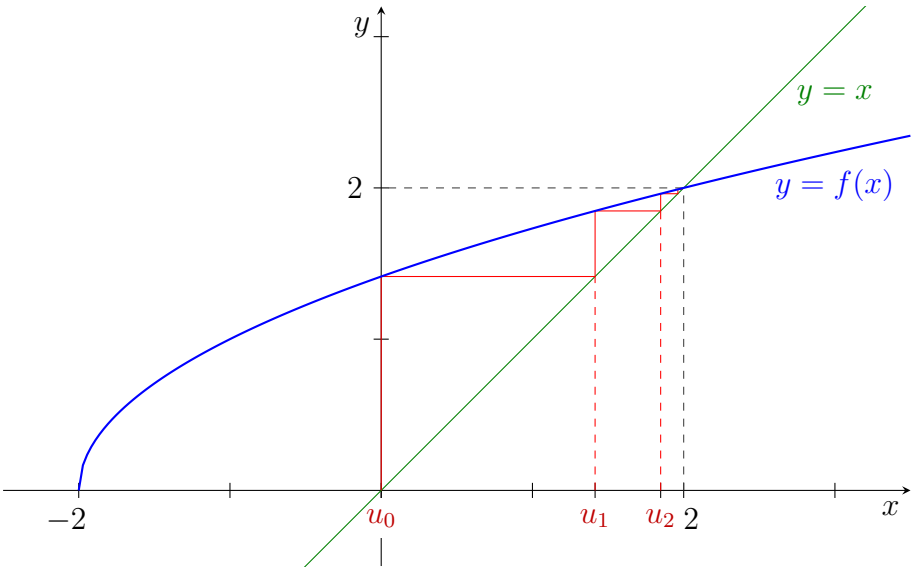
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive alors sa limite vérifie $\ell \geqslant 0$, donc $\ell = 2$.

On a démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

d. Le graphe de la fonction f est le graphe de la fonction racine carrée décalé de deux unités vers la gauche.

On remarque que $f(2) = 2$.

On ajoute la première bissectrice, ce qui permet de représenter les premièrs termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et de comprendre qu'elle converge vers 2.



Exercice 33. Simplifier les expressions suivantes.

$a = \ln\frac{25}{6} - \ln\frac{10}{3}$ $\quad b = e^{2\ln 2}$ $\quad c = e^{-2\ln 3+\ln 6}$ $\quad d = e^{1-2x}(e^x)^2$ $\quad f = \ln(xy) - \ln\frac{x}{y}$

$a = \ln\frac{5}{4}$ $\quad b = 4$ $\quad c = \frac{2}{3}$ $\quad d = e$ $\quad f = 2\ln y$

Exercice 34. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x$

a. Étudier la parité de f (*i.e.*, déterminer si f est paire, impaire, ou ni l'un ni l'autre).

   Éventuellement, réduire son ensemble de définition

b. Déterminer la dérivée de f puis dresser son tableau de variations.

c. Déterminer les limites de f.

d. Tracer l'allure de la courbe de f, avec ses tangentes aux points où elle coupe l'axe des abscisses, et où sa dérivée s'annule.

a. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et elle vérifie : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$.

Elle est donc impaire. On restreint alors son étude à l'intervalle $\mathbb{R}_+$, on obtiendra le reste de la courbe par symétrie centrale de centre l'origine du repère.

b. On obtient : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 1$.

Cette dérivée est négative si et seulement si $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$ est :

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	-1		0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

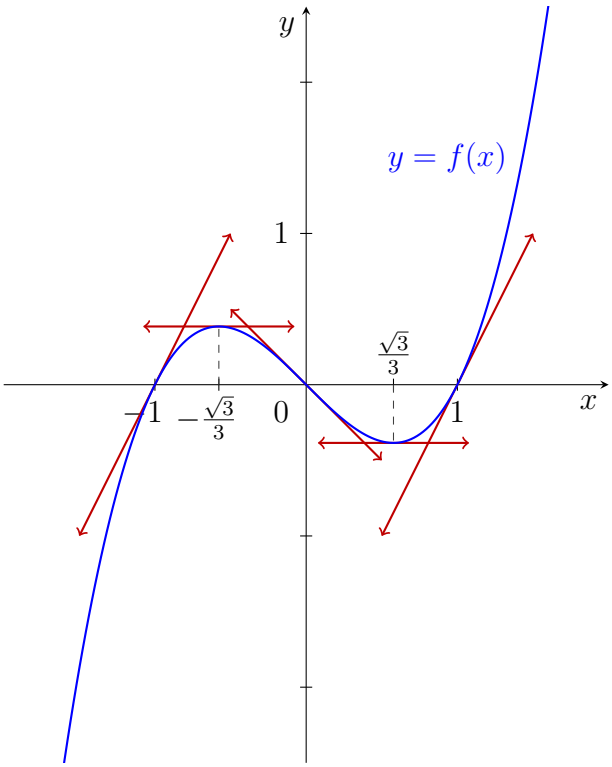
c. Comme $\quad f(x) = x(x^2 - 1) \quad$ alors $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Par parité on en déduit : $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

d. La courbe de f coupe l'axe des abscisses en $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$.

On calcule $f'(1) = f'(-1) = 2$ et $f'(0) = -1$.

On obtient un graphe comme celui ci-dessous.



Exercice 35. Reproduire l'exercice précédent avec $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

Déterminer au préalable son ensemble de définition.

Tracer ses tangentes aux points d'abscisses 0 et -2, ainsi que ses asymptotes.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(Cet ensemble n'est pas symétrique par rapport à 0 donc f n'est ni paire ni impaire.)

Sa dérivée est : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Elle est strictement positive, donc f est strictement croissante sur tout intervalle, c'est-à-dire sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

On calcule :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty.$$

Ceci montre que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Pour les limites en $\pm\infty$ on écrit :

$$f(x) = \frac{2}{1 + \frac{1}{x}}$$

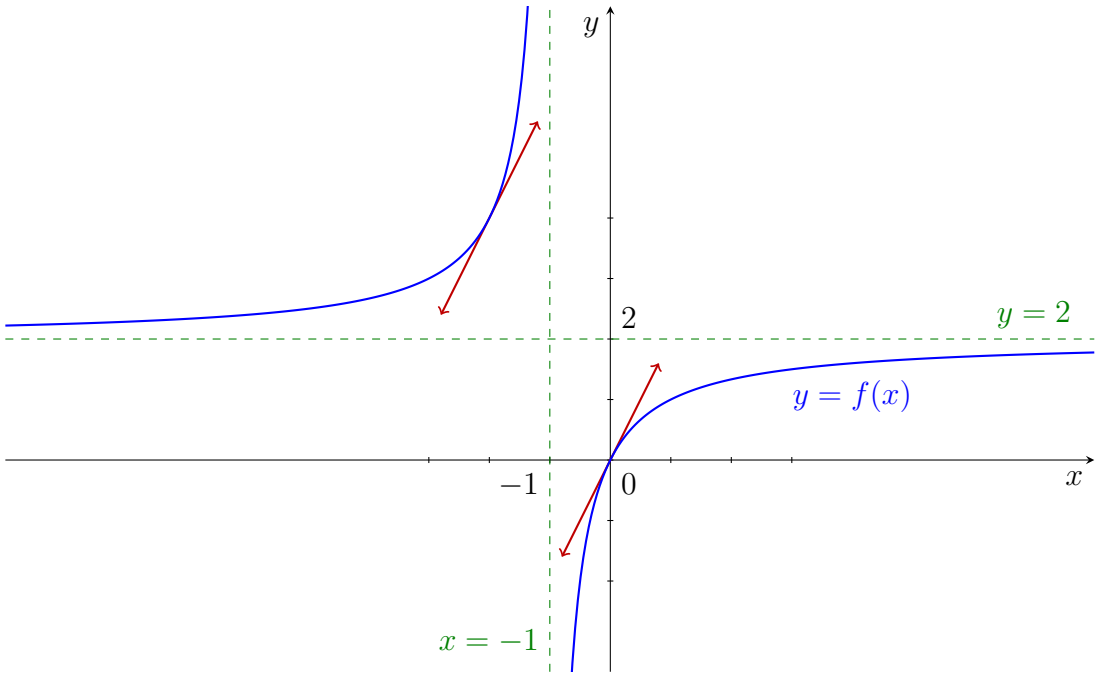
Ceci montre que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2.$$

On en déduit que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

On calcule $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f(-2) = 4$, $f'(-2) = 2$. On peut ajouter $f(1) = 1$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$.

On obtient une courbe comme :



Exercice 36. Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a. $f(x) = x^2 + 5x - 6$ b. $f(x) = \frac{2x^3+5}{3x^3+2}$ c. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

d. $f(x) = 3e^{2x+1}$ e. $f(x) = x\cos(2x)$ f. $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$

g. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5}$ h. $f(x) = \tan x$ i. $f(x) = x^2\sqrt{x}$

j. $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{x}$ k. $f(x) = e^x \sin x$ l. $f(x) = -\ln(\cos x)$

m. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ n. $f(x) = \ln(2x^2)$ o. $f(x) = 2\sin x \cos x$

Vérifier les deux dernières en les calculant d'une autre façon.

a. $f'(x) = 2x + 5$ b. $f'(x) = \frac{-27x^2}{(3x^3+2)2}$ c. $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

d. $f'(x) = 6e^{2x+1}$ e. $f'(x) = \cos(2x) - 2x\sin(2x)$ f. $f'(x) = \frac{-1}{e^x+1}$

g. $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}$ h. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ i. $f'(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$

j. $f'(x) = -\frac{1+x^2}{x^2}e^{-x^2/2}$ k. $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ l. $f'(x) = \tan x$

m. $f'(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ n. $f'(x) = \frac{2}{x}$ o. $f'(x) = 2\cos(2x)$

Pour la n on peut utiliser la formule $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, qui donne $f'(x) = \frac{4x}{2x^2} = \frac{2}{x}$.
On peut aussi écrire $f(x) = \ln 2 + 2\ln x$, donc $f'(x) = \frac{2}{x}$.

Pour la o on peut utiliser la formule $(uv)' = u'v + uv'$, qui donne $f'(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$, mais on peut aussi remarquer que $f(x) = \sin(2x)$.

Dans les deux cas on aboutit à $f'(x) = 2\cos(2x)$.

Exercice 37. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

a. Justifier que les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer qu'elles sont impaires.

c. Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (*i.e.*, $f(g(x))$ et $g(f(x))$)

d. Calculer et simplifier les dérivées de f et g.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ est défini si et seulement si $2e^x \neq 0$, ce qui est le cas car l'exponentielle est strictement positive.

   Donc f et définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est définie en x si et seulement si :

- $x^2+1 \geqslant 0$
- $x+\sqrt{x^2+1} > 0$.

La première condition est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ car un carré est toujours positif.

Pour la seconde condition on sépare le cas où x est positif de celui où x est négatif.

Si x est positif le résultat est évident : $x \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1$ puis $x+\sqrt{x^2+1} \geqslant 1$ et enfin $x+\sqrt{x^2+1} > 0$.

Si maintenant x est négatif, alors on remarque que $x^2+1 > x^2$, donc $\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2} = |x|$. Comme $x \leqslant 0$ alors $|x| = -x$, donc $x+\sqrt{x^2+1} > x+|x| = x-x = 0$, et $x+\sqrt{x^2+1} > 0$.

Finalement dans tous les cas $x+\sqrt{x^2+1} > 0$ et donc la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.

Pour la fonction f :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = \frac{e^{-2x}-1}{2e^{-x}} = \frac{e^{-2x}-1}{2e^{-x}} \times \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = \frac{1-e^{2x}}{2e^{x}} = -f(x).$$

Donc f est impaire.

Pour la fonction g on calcule $g(x)+g(-x)$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x)+g(-x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ &= \ln\left(\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)\\ &= \ln\left(x^2+1-x^2\right) = \ln 1 = 0.\end{aligned}$$

Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(-x) = -g(x)$$

La fonction g est donc impaire.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$e^{g(x)} = x+\sqrt{x^2+1} \qquad \text{et} \qquad e^{2g(x)} = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2 = 2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$$

On en déduit :

$$f(g(x)) = \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}+2x} = x.$$

Ensuite :

$$f(x)^2+1 = \frac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{4e^{2x}}+1 = \frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{4e^{2x}} = \frac{\left(e^{2x}+1\right)^2}{4e^{2x}} = \left(\frac{e^{2x}+1}{2e^{x}}\right)^2.$$

Comme $\frac{e^{2x}+1}{2e^{x}} \geqslant 0$ alors :

$$\sqrt{f(x)^2+1} = \left|\frac{e^{2x}+1}{2e^{x}}\right| = \frac{e^{2x}+1}{2e^{x}}.$$

Ceci donne :

$$f(x)+\sqrt{f(x)^2+1}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}+\frac{e^{2x}+1}{2e^x}=\frac{2e^{2x}}{2e^x}=e^x.$$

Enfin :

$$g(f(x))=\ln\left(f(x)+\sqrt{f(x)^2+1}\right)=x.$$

Finalement on a obtenu :

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f\circ g(x)=x\qquad\text{et}\qquad g\circ f(x)=x.$$

d. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors :

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(2e^x)-(e^{2x}-1)2e^x}{4e^{2x}}=\frac{2e^{3x}+2e^x}{4e^{2x}}=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$$

Puis :

$$g'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Finalement on a obtenu :

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f'(x)=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\qquad\text{et}\qquad g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Exercice 38. Liste des fonctions :

$f_1(x)=1-x$ $\quad f_2(x)=2x$ $\quad f_3(x)=x^2$ $\quad f_4(x)=x^3$ $\quad f_5(x)=\sqrt{x}$

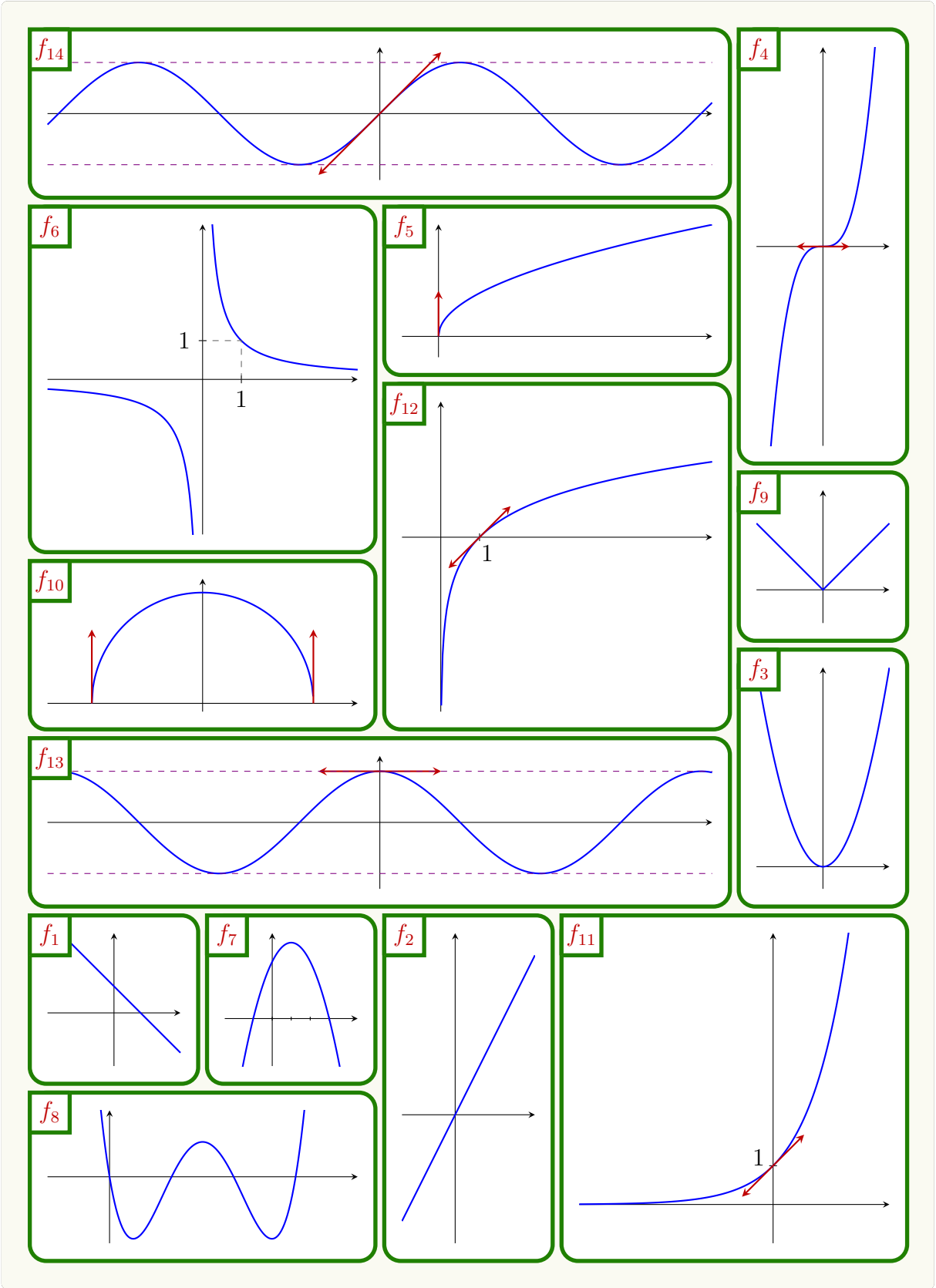
$f_6(x)=\frac{1}{x}$ $\quad f_7(x)=(x+1)(3-x)$ $\quad f_8(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ $\quad f_9(x)=|x|$

$f_{10}(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\quad f_{11}(x)=e^x$ $\quad f_{12}(x)=\ln x$ $\quad f_{13}(x)=\cos x$ $\quad f_{14}(x)=\sin x$

On remarque que :

- La fonction f_7 est une parabole orientée vers le bas, coupant l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3.
- La fonction f_8 est une courbe du quatrième degré, coupant l'axe des abscisses aux points d'abscisses 0, 1, 2 et 3.

On peut démontrer que la courbe de la fonction f_{10} est un demi-cercle.


f_{14}
f_4
f_6
1
1
f_5
f_{12}
1
f_9
f_{10}
f_3
f_{13}
f_1
f_7
f_2
f_{11}
1
f_8