# Cahier de vacances
# MPSI - Mathématiques

Bienvenue en MPSI au lycée Bellevue, et félicitations pour ce bon choix !

Ce cahier de vacances a pour but de vous faire réviser quelques notions de base de maths, et de vous entraîner au calcul.

Le calcul a une vraie fonction d'apprentissage, c'est en calculant que l'on développe son intuition mathématique et que l'on comprend vraiment les notions.

En vous entraînant vous arriverez en septembre avec déjà une certaine dextérité, que vous améliorerez encore à la rentrée.

Je recommande le programme suivant :

- Lire tout ce document en vérifiant que vous comprenez tout, et bien mémoriser les éléments de cours.
- Faire tous ses exercices.
  Certains sont plus durs, ils seront corrigés en classe.
- Ensuite, selon votre temps, faire les exercices supplémentaires du Cahier de calcul.
  Certains sont difficiles, ils seront corrigés en classe à la demande.

Instruction importante : *tous les calculs doivent être faits sans calculatrice !*

Le Cahier de calcul réalisé sous la supervision de Colas Bardavid est disponible en téléchargement libre à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc/`. Les pages recommandées sont indiquées dans le texte. Les autres pourront vous être utiles durant l'année.

Je conseille de travailler plutôt en août, éventuellement juste la seconde quizaine.

La partie I est consacrée aux calculs, la seconde est plus théorique. Vous pouvez travailler les deux simultanément.

Les réponses seront données à la rentrée : lundi 1er septembre 2025 à 8h.

Bon courage, bonnes vacances.

M. Gonard, professeur de mathématiques.

# I. Calculs

## A. Fractions

Les fractions doivent toujours être données sous forme irréductible.

**Exercice 1.** Simplifier les fractions suivantes.

$$a = \frac{84}{30} \qquad b = \frac{9 \times 5^{-2} \times 34}{2^5 \times 21} \qquad c = \frac{9}{5} - \frac{5}{9} \qquad d = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

**Exercice 2.** Soit $x$, $y$, $z$ trois réels. Simplifier les fractions suivantes, en supposant qu'elles sont bien définies.

$$a = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} \qquad b = \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} \qquad c = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \qquad d = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$$

**Exercice 3.** Comparer (*i.e.*, dire quel est le plus grand) :

$$a = \frac{7}{6} \quad \text{et} \quad a' = \frac{6}{7} \qquad b = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad b' = \frac{6}{13} \qquad c = \frac{25}{49} \quad \text{et} \quad c' = \frac{51}{100}$$

$$d = \frac{x^2+1}{x+1} \quad \text{et} \quad d' = \frac{x^3+1}{x^2+1} \quad \text{avec } x \text{ réel positif.}$$

▷ Voir aussi : fiches n°1 et 2 du Cahier de Calcul.

## B. Équations du second degré

- Il est inutile de faire apparaître les formules. Par exemple pour résoudre l'équation $x^2 - 7x + 10 = 0$ on écrira :

  > *Le discriminant de cette équation est :* $\Delta = 7^2 - 4 \times 10 = 9$.
  > *Il est strictement positif donc les solutions sont* $x_1 = \frac{7+3}{2} = 5$ *et* $x_2 = \frac{7-3}{2} = 2$.

- Dès que l'un des coefficients de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est nul il n'est pas nécessaire de calculer le discriminant.

**Exercice 4.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2 + x - 6 = 0$ b. $x^2 + 3x + 3 = 0$ c. $16x^2 - 8x + 1 = 0$

d. $x^2 + 4x - 7 = 0$ e. $x^2 - 36 = 0$ f. $3x^2 + 8x = 0$

g. $x^2 - \sqrt{13}x + 1 = 0$ h. $x^3 - 5x^2 + 14x = 0$ i. $5x^4 + 7x^2 + 2 = 0$

**Exercice 5.** Résoudre les inéquations suivantes.

a. $x^2 + 6x - 16 < 0$ b. $4x^2 + 20x + 25 \leqslant 0$ c. $2x^2 + x + 1 \geqslant 0$

- Une équation du second degré peut parfois être simplifiée comme une fraction. Par exemple :
$$2x^2 - 14x + 20 = 0 \qquad \text{équivaut à} \qquad x^2 - 7x + 10 = 0.$$
- Parfois il est inutile d'expliciter le discriminant. Seule sa racine carrée est importante.

  Par exemple pour résoudre l'équation $x^2 - 4x - 45 = 0$ on peut écrire :

> *Le discriminant de cette équation est :*
> $$\Delta = 4^2 + 4 \times 45 = 4 \times (4 + 45) = 4 \times 49 = (2 \times 7)^2.$$
> *Il est strictement positif donc les solutions sont* $x = \frac{4 \pm 2\times 7}{2} = 2 \pm 7.$
> *Donc* $x_1 = -5$ *et* $x_2 = 9.$

- Enfin la somme et le produit des racines permettent de vérifier le calcul.

  En effet si $x_1$ et $x_2$ sont solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ alors :
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

> *Pour l'équation* $x^2 - 4x - 45 = 0$ *on a obtenu* $x_1 = -5$ *et* $x_2 = 9.$
> *Effectivement* $x_1 + x_2 = 4$ *et* $x_1 x_2 = -45.$

**Exercice 6.** Résoudre les équations et le système suivants.

a. $3x^2 - 18x + 24 = 0$ b. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2}$ c. $\begin{cases} x + y = \frac{74}{35} \\ xy \quad = 1 \end{cases}$

**Exercice 7.** Résoudre les équations :

a. $x^2 + 472x - 473 = 0$ b. $5x^2 + 23x + 26 = 0$

Pour ceci deviner une solution évidente, puis utiliser la somme et le produit.

▷ Voir aussi : fiche n°6 du Cahier de Calcul.

## C. Expressions algébriques

- Les identités remarquables doivent être connues et utilisées dès que possible.
- Il n'est pas toujours utile de développer une expression, parfois au contraire c'est la forme factorisée qui est utile.

**Exercice 8.** Calculer :

$a = 107^2 - 93^2$ $b = \dfrac{101}{99} - \dfrac{99}{101}$ $c = 19^2 + 11^2 + 22 \times 19$ $d = \dfrac{\frac{71}{70} - \frac{1}{141}}{1 + \frac{71}{70\times 141}}$

**Exercice 9.** Résoudre les équations suivantes.

a. $9x^2+6x+1=0$ b. $29x^2+29x-x-1=0$ c. $(9x+7)^2=(8x+8)^2$

d. $(5x+8)^2=(5x+8)(2x-7)$ e. $25x^2+(5x+2)(4x+3)-4=0$

**Exercice 10.** Développer les expressions suivantes.

$a=(x-2)^2(x+2)^2$ $b=(x+1)^3$ $c=(x^2+x+1)^2$ $d=(x-1)^4$

$e=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ $f=\left(x+\sqrt{2x}+1\right)\left(x-\sqrt{2x}+1\right)$

▷ Voir aussi : fiches n°3 et 5 du Cahier de Calcul (exercices 1 à 3 pour la dernière).

## D. Racine carrée

- La racine carrée $\sqrt{x}$ n'est définie que si $x$ est un réel positif.
- Retenir : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x}^2 = x$ mais $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2}=|x|$

  La première égalité n'est définie que si $x$ est positif, la seconde est bien définie pour tout réel $x$, même négatif.
- Il est demandé de ne pas laisser de racines au dénominateur des fractions.

  Par exemple : $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- La multiplication par la quantité conjuguée simplifie beaucoup d'expressions :

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$$

**Exercice 11.** Simplifier les réels suivants.

$a=\sqrt{20}$ $b=3\sqrt{2}-\sqrt{8}$ $c=\left(2\sqrt{7}\right)^2$ $d=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ $e=\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4$

$f=\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ $g=\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right)^2$ $h=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$

**Exercice 12.** Simplifier les fractions suivantes.

$a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ $b=\dfrac{1}{\sqrt{18}-\sqrt{12}}$ $c=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ $d=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-1}\right)^2$

**Exercice 13.** Simplifier les réels suivants.

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1} \qquad b = \sqrt{x-2\sqrt{x}+1} \times \sqrt{x+2\sqrt{x}+1} \quad \text{où } x \geqslant 0.$$

▷ Voir aussi : fiche n°4 du Cahier de Calcul.

## E. Valeur absolue

**Définitions et propriétés.** La valeur absolue d'un réel est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un autre définition est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| = \sqrt{x^2}.$$

De plus la valeur absolue vérifie les propriétés :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |xy| = |x| \times |y| \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad \text{et} \qquad |x|^2 = x^2$$

Dans certains cas on peut élever au carré une équation faisant intervenir une racine carrée.

Résoudre l'équation : $|x-5| = 3$.

*On raisonne par équivalences :*

$$\begin{aligned} |x-5| = 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad |x-5|^2 = 9 && \textit{car les termes sont positifs.} \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-5)^2 = 9 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 10x + 25 = 9 && \textit{etc.} \end{aligned}$$

**Exercice 14.** Résoudre les équations suivantes.

a. $|2x-1| = 5$ b. $|4-3x| = -2$ c. $|x+1| = |2x-4|$ d. $(x+5)^2 = |x+5|$

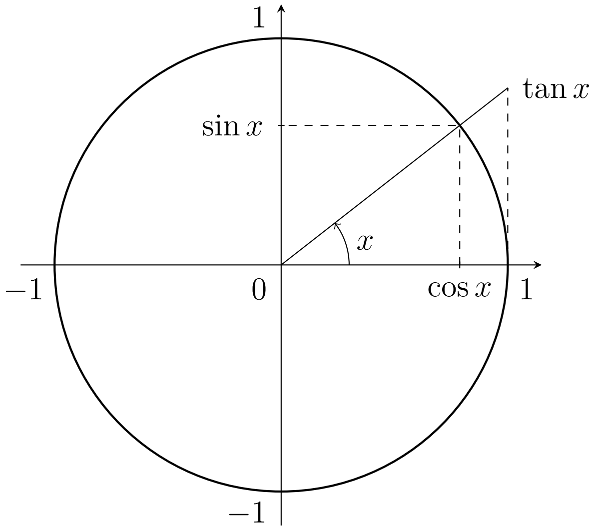
**Exercice 15.** Résoudre les inéquations suivantes.

a. $|x| \leqslant 4$ b. $|2x+3| \leqslant 3$ c. $|x+1| \geqslant 2$ d. $|1-x| \leqslant |2-x|$

# II. Notions de base

## A. Trigonométrie

Le cercle trigonométrique doit être dans vos têtes.




**Définition.** La fonction tangente est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

**Exercice 16.** Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Placer sur le cercle trigonométrique les angles $-x$, $\pi - x$ et $\pi + x$.

Compléter les formules :

$\cos(-x) =$ $\cos(\pi - x) =$ $\cos(\pi + x) =$

$\sin(-x) =$ $\sin(\pi - x) =$ $\sin(\pi + x) =$

**Exercice 17.** Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Placer sur le cercle trigonométrique les angles $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$.

Compléter les formules :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

**Formules de base.** Pour tous réels $x$ et $y$ :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

**Exercice 18.** Compléter les formules :

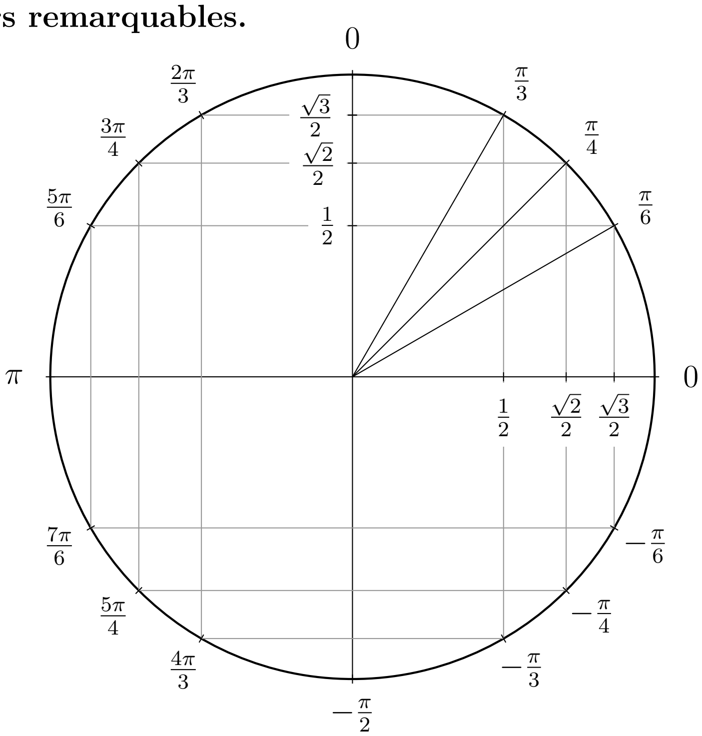
$\cos(x-y) =$

$\sin(x-y) =$

$\cos(2x) =$ $\qquad\qquad =$ $\qquad\qquad =$

$\sin(2x) =$

**Angles et valeurs remarquables.**




**Exercice 19.**

Compléter :

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | | | | | | |
| $\cos x$ | | | | | | |
| $\tan x$ | | | | | | |

**Exercice 20.** Calculer :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ | $\sin\frac{3\pi}{4}$ | $\cos\frac{7\pi}{6}$ | $\sin\frac{11\pi}{6}$ | $\sin\frac{5\pi}{2}$ |
| $\cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$ | $\sin 3\pi$ | $\cos\frac{-5\pi}{4}$ | $\sin\frac{22\pi}{3}$ | $\cos 9\pi$ |
| $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$ | $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ | $\tan\frac{2\pi}{3}$ | $\tan\frac{3\pi}{4}$ | $\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$ |

**Exercice 21.** Donner un réel $x$ vérifiant :

a. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d. $\begin{cases}\cos x = \frac{1}{2}\\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ e. $\begin{cases}\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x = -\frac{1}{2}\end{cases}$ f. $\begin{cases}\cos x = 0\\ \sin x = -1\end{cases}$

**Exercice 22.** Résoudre les équations suivantes.

a. $\sin x = 0$ b. $\cos x = 0$ c. $\cos x = -1$

d. $\cos x = \frac{1}{2}$ e. $\sin x = \frac{1}{2}$ f. $\tan x = 1$

g. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ h. $\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x = \frac{7}{4}$ i. $(\cos x + \sin x)^2 = 1$

**Exercice 23.**

a. En utilisant $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$, calculer le cosinus, le sinus et la tangente de $\frac{\pi}{12}$.

b. En utilisant $\frac{\pi}{6} = 2\frac{\pi}{12}$ calculer de nouveau le cosinus, le sinus et la tangente de $\frac{\pi}{12}$.

c. Démontrer que vous avez obtenu les mêmes valeurs.

**Exercice 24.** Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ c. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x + \tan 9x}{\tan 3x + \tan 7x}$

▷ Voir aussi : fiche n°8 du Cahier de Calcul.

## B. Complexes

- La multiplication par la quantité conjuguée permet de diviser par un complexe.

> $$\frac{1}{3-i} = \frac{(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

- La forme algébrique d'un complexe est $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Une forme exponentielle d'un complexe non-nul est $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

  Dans ce cas $r$ est le module de $z$ : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**Exercice 25.** Calculer les nombres complexes suivants.

$a = (3+i)(-2+3i)$ $\quad$ $b = (1-i)^2$ $\quad$ $c = \dfrac{2+i}{3+i}$ $\quad$ $d = \dfrac{(3+4i)(4+3i)}{5+5i}$

**Exercice 26.** Donner la forme algébrique des complexes suivants.

$a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ $\quad$ $b = 3e^{i3\pi}$ $\quad$ $c = \sqrt{18}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $\quad$ $d = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $\quad$ $e = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

**Exercice 27.** Donner une forme exponentielle des complexes suivants.

$a = 3i$ $\quad$ $b = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad$ $c = 2 - 2i$ $\quad$ $d = -4$ $\quad$ $e = -3 - 3i\sqrt{3}$

**Exercice 28.** Déterminer tous les nombres complexes $z$ tels que :

a. $z^2 = 4$ $\quad$ b. $z^2 = 3 + 4i$ $\quad$ c. $z^2 = -5 - 12i$ $\quad$ d. $z^2 = i$ $\quad$ e. $z^2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

▷ Voir aussi : fiche n°16 du Cahier de Calcul.

## C. Suites

**Rappel.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

On dit alors que $r$ est la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le terme général d'une telle suite est :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr.$$

La somme des termes d'une suite arithmétique se calcule grâce à la formule :

$$1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

**Rappel.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q \times u_n.$$

On dit alors que $q$ est la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le terme général d'une telle suite est :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 q^n.$$

La somme des termes d'une suite géométrique est donnée par la formule :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} \qquad \text{si} \quad q \neq 1.$$

On utilise le signe $\Sigma$ (sigma) pour noter les sommes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n \qquad\qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

**Exercice 29.**

a. Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques, ou ni l'un ni l'autre.

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 7 - 3n$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 3$
3. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (n+1)(n+2)$
4. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{4}{3^n}$
5. $u_0 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 2n$

b. Donner la somme des termes de $u_0$ à $u_n$ pour chacune de ces suites.

On pourra utiliser la formule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**Exercice 30.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 4$.

a. Déterminer un réel $\gamma$ tel que : $\quad \gamma = 3\gamma + 4$.

b. Démontrer que la suite $(u_n - \gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

c. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de $n$. Vérifier pour $n = 0$, 1, et 2.

▷ Voir aussi : fiche n°21 du Cahier de Calcul exercices 1 à 9.

**Exercice 31.**

Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4^n-1}{2^n}$ b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n}$ c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}\right)$

**Exercice 32.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, positive et majorée par 2.

b. Démontrer qu'elle est croissante.

c. Démontrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

d. Tracer la courbe de la fonction $f$ définie par : $\forall x \in [-2, +\infty[ \quad f(x) = \sqrt{x+2}$
Représenter sur le graphe les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## D. Exponentielle et logarithme

**Propriétés de l'exponentielle.**
La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Ceci implique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x > 0$$

Ses limites sont :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad e^{x+y} = e^x e^y \qquad \text{et} \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

**Propriétés du logarithme népérien.**
La fonction logarithme népérien est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ uniquement.
Ses limites sont :

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \text{et} \qquad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

De plus :

$$\ln 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \ln(a^n) = n \ln a$$

**Propriété.**
Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont bijectives, inverses l'une de l'autre, ce qui signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \qquad y = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad \ln y = x$$

**Exercice 33.** Simplifier les expressions suivantes.

$a = \ln \frac{25}{6} - \ln \frac{10}{3}$ $\qquad b = e^{2\ln 2}$ $\qquad c = e^{-2\ln 3 + \ln 6}$ $\qquad d = e^{1-2x}(e^x)^2$ $\qquad f = \ln(xy) - \ln \frac{x}{y}$

▷ Voir aussi : fiche n°7 du Cahier de Calcul.

## E. Fonctions

**Définitions.** Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est paire si :

- $D$ est symétrique par rapport à 0. $\quad (\forall x \in D \quad -x \in D)$
- $\forall x \in D \qquad f(-x) = f(x)$

Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
C'est le cas par exemple des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \cos x$.

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est impaire si :

- $D$ est symétrique par rapport à 0. $\quad (\forall x \in D \quad -x \in D)$
- $\forall x \in D \qquad f(-x) = -f(x)$

Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.
C'est le cas par exemple des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$.

Dans le cas où $f$ est paire ou impaire on peut restreindre son étude à $\mathbb{R}_+$, et obtenir le reste de la courbe par symétrie.

**Définition.** Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est périodique de période $T$ ($T > 0$) si :

- $D$ est stable par addition de $T$. $(\forall x \in D \quad x + T \in D)$
- $\forall x \in D \qquad f(x+T) = f(x)$

Son graphe est alors invariant par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.
Par exemple les fonctions cos et sin sont périodiques de période $2\pi$.

Dans le cas où $f$ est périodique de période $T$ on peut restreindre son étude à l'intervalle $[0, T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, et obtenir le reste de la courbe par translations.

**Dérivées des fonctions usuelles.** $(n \in \mathbb{N})$

| $f(x)$ | Ensemble de définition | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| $x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ | $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\mathbb{R}_+$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ si $x \neq 0$ |
| $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin x$ |
| $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\cos x$ |
| $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^x$ |
| $\ln x$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\frac{1}{x}$ |

**Calcul des dérivées.** Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables, et $\lambda$ un réel.

| | |
|---|---|
| $u+v$ | $u'+v'$ |
| $\lambda u$ | $\lambda u'$ |
| $uv$ | $u'v+uv'$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| $\frac{1}{u}$ | $-\frac{u'}{u^2}$ |

| | |
|---|---|
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $e^u$ | $u' \times e^u$ |
| $\ln u$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $\cos u$ | $-u' \times \sin u$ |
| $\sin u$ | $u' \times \cos u$ |

**Exercice 34.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x$

a. Étudier la parité de $f$ (*i.e.*, déterminer si $f$ est paire, impaire, ou ni l'un ni l'autre).
Éventuellement, réduire son ensemble de définition

b. Déterminer la dérivée de $f$ puis dresser son tableau de variations.

c. Déterminer les limites de $f$.

d. Tracer l'allure de la courbe de $f$, avec ses tangentes aux points où elle coupe l'axe des abscisses, et où sa dérivée s'annule.

**Exercice 35.** Reproduire l'exercice précédent avec $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

Déterminer au préalable son ensemble de définition.

Tracer ses tangentes aux points d'abscisses 0 et $-2$, ainsi que ses asymptotes.

**Exercice 36.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a. $f(x) = x^2 + 5x - 6$

b. $f(x) = \frac{2x^3+5}{3x^3+2}$

c. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

d. $f(x) = 3e^{2x+1}$

e. $f(x) = x\cos(2x)$

f. $f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$

g. $f(x) = \sqrt{2x^2+5}$

h. $f(x) = \tan x$

i. $f(x) = x^2\sqrt{x}$

j. $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{x}$

k. $f(x) = e^x \sin x$

l. $f(x) = -\ln(\cos x)$

m. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

n. $f(x) = \ln(2x^2)$

o. $f(x) = 2\sin x\cos x$

Vérifier les deux dernières en les calculant d'une autre façon.

**Exercice 37.** On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

a. Justifier que les fonctions $f$ et $g$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer qu'elles sont impaires.

c. Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\quad$ (*i.e.*, $f(g(x))$ et $g(f(x))$)

d. Calculer et simplifier les dérivées de $f$ et $g$.

▷ Voir aussi : fiche n°9 du Cahier de Calcul.

## F. Courbes représentatives

Les fonctions suivantes sont supposées connues :

$x \mapsto ax + b \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto x^3$

$x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \mapsto \sqrt{x} \qquad x \mapsto \cos x \qquad x \mapsto \sin x \qquad x \mapsto e^x \qquad x \mapsto \ln x$

Il faut bien connaître pour chacune :

- l'ensemble de définition,
- les limites,
- la dérivée,
- la courbe représentative,
- les tangentes aux points remarquables.

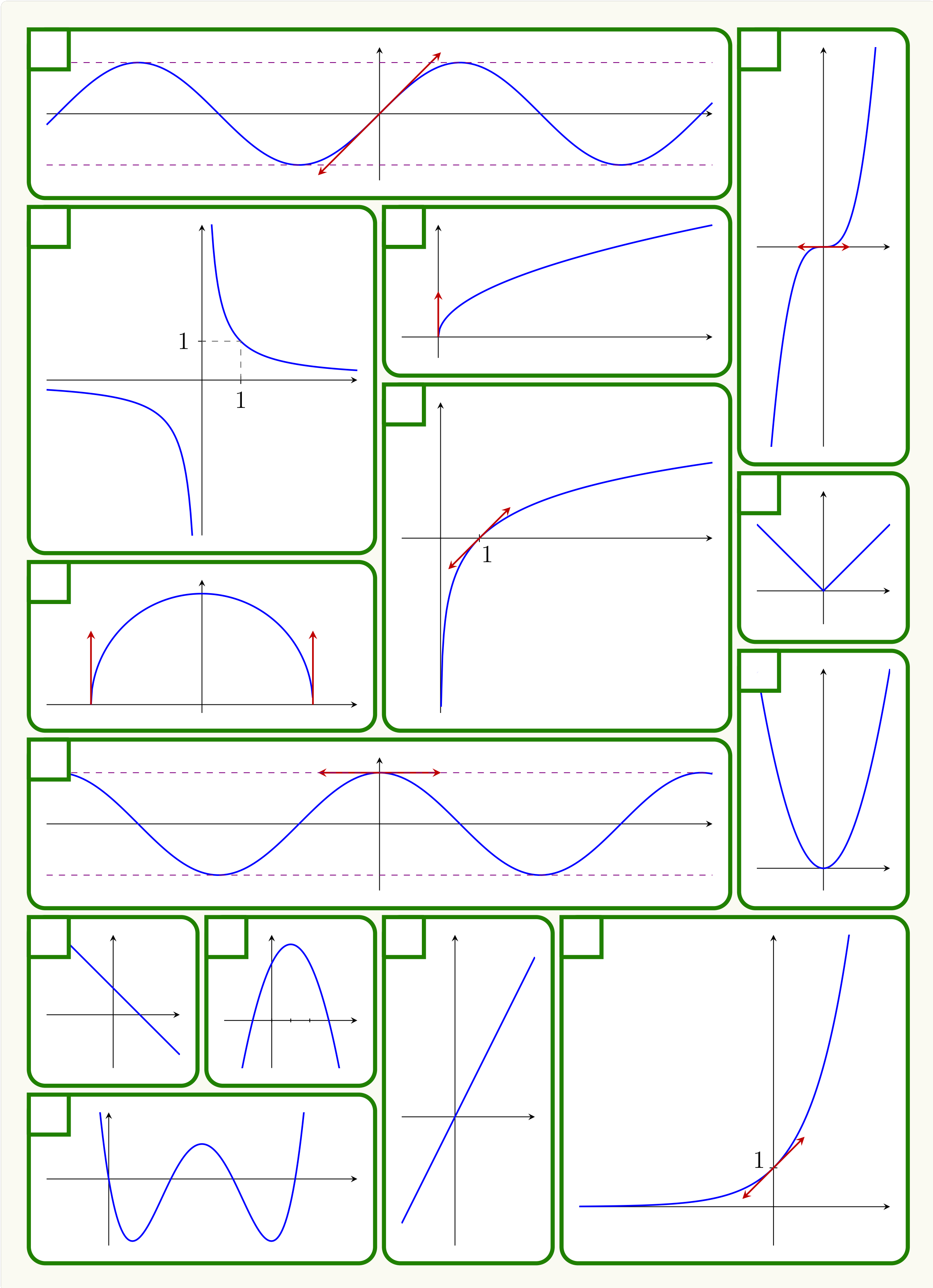
**Exercice 38.** Identifier les fonctions ci-dessous parmi les fonctions représentées en page suivante.

$f_1(x) = 1 - x \qquad f_2(x) = 2x \qquad f_3(x) = x^2 \qquad f_4(x) = x^3 \qquad f_5(x) = \sqrt{x}$

$f_6(x) = \frac{1}{x} \qquad f_7(x) = (x+1)(3-x) \qquad f_8(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) \qquad f_9(x) = |x|$

$f_{10}(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad f_{11}(x) = e^x \qquad f_{12}(x) = \ln x \qquad f_{13}(x) = \cos x \qquad f_{14}(x) = \sin x$

Note : tous les repères sont orthonormés.


1
1
1
1