Feuille d'exercices 24
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2. Soient $u, v \in E$. D'après les identités de polarisation :

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \frac{1}{4}\left(\|f(u+v)\| - \|f(u-v)\|\right) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\| - \|u-v\|\right) = \langle u, v\rangle.$$

Exercice 3. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec le produit scalaire usuel de $M_n(\mathbb{R})$:

$$\langle A, I_n\rangle^2 \leq \|A\|^2\|I_n\|^2,$$

c'est-à-dire $\mathrm{tr}(A)^2 \leq n \cdot \mathrm{tr}(A^\intercal A)$, ce qui est la formule voulue.

Exercice 4. Soient $u = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $v = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$.
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2,$$

c'est-à-dire

$$n^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

Exercice 5. Comme $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il suffit de montrer que f est injective.
Soit $u \in E$, alors :

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathrm{Ker}(f) & \Leftrightarrow & \langle u, \cdot\rangle = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \forall v \in E,\ \langle u, v\rangle = 0 \\ & \Rightarrow & \|u\|^2 = 0 \\ & \Rightarrow & u = 0_E, \end{array}$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, donc f est injective, donc f est un isomorphisme.

Exercice 6.

- $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$: Soit $u \in (F+G)^\perp$. Alors : $\forall v \in F+G,\ \langle u, v\rangle = 0$. En particulier : $\forall v \in F,\ \langle u, v\rangle = 0$, donc $u \in F^\perp$, et de même $u \in G^\perp$. Donc $u \in F^\perp \cap G^\perp$.
  Réciproquement, soit $u \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $v = v_F + v_G \in F+G$, alors : $\langle u, v\rangle = \langle u, v_F\rangle + \langle u, v_G\rangle = 0$.
  Donc $u \in (F+G)^\perp$.
  Donc $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$: Soit $u = u_1 + u_2 \in F^\perp + G^\perp$. Soit $v \in F \cap G$, alors : $\langle u, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle = 0$, donc $u \in (F \cap G)^\perp$. Donc $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
  De plus, d'après la formule de Grassmann, et comme $\dim(F \perp) = \dim(E) - \dim(F)$:

  $$\begin{array}{rcl} \dim(F^\perp + G^\perp) & = & \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F^\perp \cap G^\perp) \\ & = & \dim(E) - \dim(F) - \dim(G) + \dim(F+G) \\ & = & \dim(E) - \dim(F \cap G) \\ & = & \dim((F \cap G)^\perp). \end{array}$$

  Donc $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 7. Considérons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \in F$ la suite définie par $u_{k,0} = 1$, $u_{k,k} = -1$ et : $\forall n \notin \{0, k\},\ u_{k,n} = 0$.
Soit $v \in F^\perp$. Alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \langle v, u_k\rangle = 0$, c'est-à-dire : $1 \times v_0 - 1 \times v_k = 0$, soit $v_k = v_0$. La suite v est donc constante donc, comme v est stationnaire à 0, c'est la suite nulle. Donc $F^\perp = \{0_E\}$.
On a donc bien $F + F^\perp = F \neq E$.

Exercice 8. Soit $k \in [\![1, p]\!]$. L'égalité appliquée à $u = e_k$ s'écrit :

$$1 = \sum_{i=1}^{p} \langle e_k, e_i\rangle^2 = 1 + \sum_{i=1,\ i\neq k}^{p} \langle e_k, e_i\rangle^2,$$

d'où : $\forall i \neq k,\ \langle e_k, e_i\rangle = 0$. La famille $\mathcal{F}$ est donc orthonormée.
En particulier, la famille $\mathcal{F}$ est libre. Supposons qu'elle ne soit pas génératrice de E ; soit alors $v \in E \setminus \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Quitte à orthonormaliser, on peut supposer que v est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}$. Alors : $\|v\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle v, e_i\rangle^2 = 0$, donc $v = 0_E$, ce qui est absurde. Donc $\mathcal{F}$ est génératrice de E ; c'est donc une base de E, et E est bien euclidien de dimension p.

Exercice 9. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt :

(a)
- $e'_1 = e_1 = (1, 1)$,
  $e'_2 = e_2 - \dfrac{\langle e_2, e'_1\rangle}{\|e'_1\|^2} e'_1 = (1, 0) - \dfrac{1}{2}(1, 1) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$,
- $e''_1 = \dfrac{e'_1}{\|e'_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$,
  $e''_2 = \dfrac{e'_2}{\|e'_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

(b)
- $e'_1 = e_1 = (1, 1, -1)$,
  $e'_2 = e_2 - \dfrac{\langle e_2, e'_1\rangle}{\|e'_1\|^2} e'_1 = (1, -1, 1) + \dfrac{1}{3}(1, 1, -1) = \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}(2, -1, 1)$,
  on prend alors $e'_2 = (2, -1, 1)$,
  $e'_3 = e_3 - \dfrac{\langle e_3, e'_1\rangle}{\|e'_1\|^2} e'_1 - \dfrac{\langle e_3, e'_2\rangle}{\|e'_2\|^2} e'_2 = (-1, 1, 1) + \dfrac{1}{3}(1, 1, -1) + \dfrac{2}{6}(2, -1, 1) = (0, 1, 1)$,
- $e''_1 = \dfrac{e'_1}{\|e'_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$,
  $e''_2 = \dfrac{e'_2}{\|e'_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$,
  $e''_3 = \dfrac{e'_3}{\|e'_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$.

(c)
- $e'_1 = e_1 = (0, 1, 1, 1)$,
  $e'_2 = e_2 - \dfrac{\langle e_2, e'_1\rangle}{\|e'_1\|^2} e'_1 = (1, 0, 1, 1) - \dfrac{2}{3}(0, 1, 1, 1) = \dfrac{1}{3}(3, -2, 1, 1)$,
  on prend alors $e'_2 = (3, -2, 1, 1)$,
  $e'_3 = e_3 - \dfrac{\langle e_3, e'_1\rangle}{\|e'_1\|^2} e'_1 - \dfrac{\langle e_3, e'_2\rangle}{\|e'_2\|^2} e'_2 = (1, 1, 0, 1) - \dfrac{2}{3}(0, 1, 1, 1) - \dfrac{2}{15}(3, -2, 1, 1) = \dfrac{1}{5}(3, 3, -4, 1)$,
  on prend alors $e'_3 = (3, 3, -4, 1)$,
  $$\begin{aligned} e'_4 &= e_4 - \tfrac{\langle e_4, e'_1\rangle}{\|e'_1\|^2} e'_1 - \tfrac{\langle e_4, e'_2\rangle}{\|e'_2\|^2} e'_2 - \tfrac{\langle e_4, e'_3\rangle}{\|e'_3\|^2} e'_3 \\ &= (1, 1, 1, 0) - \tfrac{2}{3}(0, 1, 1, 1) - \tfrac{2}{15}(3, -2, 1, 1) - \tfrac{2}{35}(3, 3, -4, 1) \\ &= \tfrac{3}{7}(1, 1, 1, -2), \end{aligned}$$

on prend alors $e_4' = (1,1,1,-2)$,

- $e_1'' = \dfrac{e_1'}{\|e_1'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1)$,
  $e_2'' = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}(3,-2,1,1)$,
  $e_3'' = \dfrac{e_3'}{\|e_3'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{35}}(3,3,-4,1)$,
  $e_4'' = \dfrac{e_4'}{\|e_4'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,-2)$.

Exercice 10. Soit $u \in E$. Notons $u = u_F + u_{F^\perp}$ la décomposition de u selon F et $F^\perp$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_{F^\perp} = \lambda u_0$, on a : $\langle u, u_0\rangle = \lambda\|u_0\|^2$, donc $\lambda = \dfrac{\langle u, u_0\rangle}{\|u_0\|^2}$. Donc :

$$p(u) = u_F = u - \lambda u_0 = u - \frac{\langle u, u_0\rangle}{\|u_0\|^2}u_0,$$

et :

$$s(u) = u_F - u_{F^\perp} = u - 2\frac{\langle u, u_0\rangle}{\|u_0\|^2}u_0.$$

Exercice 11.

(a) On applique l'algorithme de Gram-Schmidt :

- $P_1 = 1$,
  $P_2 = X - \dfrac{\langle X, P_1\rangle}{\|P_1\|^2}P_1 = X - \dfrac{1}{2}$,
  $P_3 = X^2 - \dfrac{\langle X^2, P_1\rangle}{\|P_1\|^2}P_1 - \dfrac{\langle X^2, P_2\rangle}{\|P_2\|^2}P_2 = X^2 - \dfrac{\frac{1}{3}}{1}1 - \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}}\left(X - \dfrac{1}{2}\right) = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$,
- $Q_1 = \dfrac{P_1}{\|P_1\|} = 1$,
  $Q_2 = \dfrac{P_2}{\|P_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{12}}}\left(X - \dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{12}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$,
  $Q_3 = \dfrac{P_3}{\|P_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{180}}}\left(X^2 - X + \dfrac{1}{6}\right) = \sqrt{180}\left(X^2 - X + \dfrac{1}{6}\right)$.

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \|X^2 - (aX+b)\|^2$. On cherche donc la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$. Par construction, le nombre recherché est :

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \langle X^2, Q_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{180}}.$$

Exercice 12. Supposons p orthogonal. Soit $u \in E$, alors, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|u\|^2 = \|p(u)\|^2 + \|u - p(u)\|^2 \geq \|p(u)\|^2,$$

donc $\|p(u)\| \leq \|u\|$.

Réciproquement, supposons que : $\forall u \in E, \quad \|p(u)\| \leq \|u\|$. Notons F et G les sous-espaces caractéristiques de p, et soient $u \in F,\ v \in G$. Considérons $f : \lambda \mapsto \|u + \lambda v\|^2$. Par hypothèse :

$$f(0) = \|u\|^2 = \|p(u + \lambda v)\|^2 \leq f(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

donc f admet un minimum en 0. Donc $f'(0) = 2\langle u, v\rangle = 0$. Donc F et G sont orthogonaux, donc p est orthogonal.

Exercice 13. On a déjà orthonormalisé la famille $\left(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2\right)$ (cf l'exercice 11). Notons $\left(h_1 : x \mapsto 1,\ h_2 : x \mapsto \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right),\ h_3 : x \mapsto \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right)$ son orthonormalisée.
Alors, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{array}{rcl} d(\exp, F)^2 & = & \| \exp - p_F^{\perp}(\exp) \|^2 \\ & = & \| \exp \|^2 - \langle \exp, h_1\rangle^2 - \langle \exp, h_2\rangle^2 - \langle \exp, h_3\rangle^2 \\ & = & \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e-1)^2 - 3(3-e)^2 - 5(7e - 19)^2 \\ & = & -\frac{497}{2}e^2 + 1465e - \frac{3667}{2} \\ & \simeq & 312,6 \end{array}$$

d'où $d(\exp, F) \simeq 17,7$.

Exercice 14. On a : $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\| = d(M, F)$ où $F = \mathrm{Vect}(I_n, U)$.
On orthonormalise la famille (I_n, U) :

- $A_1 = I_n$,
  $A_2 = U - \frac{\langle U, A_1\rangle}{\|A_1\|^2} A_1 = U - \frac{n}{n} I_n = U - I_n$,
- $B_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|} = \frac{1}{\sqrt{n}} I_n$, $B_2 = \frac{A_2}{\|A_2\|} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}(U - I_n)$,

puis, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{array}{rcl} d(M, F)^2 & = & \|M\|^2 - \langle M, B_1\rangle^2 - \langle M, B_2\rangle^2 \\ & = & \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ii}\right)^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i\neq j} m_{ij}\right)^2. \end{array}$$