Feuille d'exercices 23
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(b) $\forall n \geq 2,\ \dfrac{1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2}{n(n-1)} = \dfrac{2}{n-1} - \dfrac{2}{n}$.

La série considérée est télescopique, donc convergente puisque la suite $\left(\dfrac{2}{n}\right)$ est convergente. On a :

$$\forall n \geq 2,\ \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\binom{k}{2}} = \frac{2}{1} - \frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2,$$

donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} = 2$.

Exercice 2. On a : $\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{2}{\tan 2x} = \dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{2(1-\tan^2 x)}{2\tan x} = \tan x$, donc :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}} - \frac{1}{2^{n-1}\tan\frac{\pi}{2^n}}.$$

La série de terme général $\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ est ainsi télescopique, donc converge puisque :

$$\frac{1}{2^n \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi},$$

c'est-à-dire que la suite $\left(\dfrac{1}{2^n \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)$ est convergente. On a :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}} - 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi},$$

donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

Exercice 3. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $\exp$ (de classe C^∞) à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ entre 0 et x :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{k=0}^{n} \exp^{(k)}(0)\frac{(x-0)^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\exp^{(n+1)}(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt,
\end{aligned}$$

avec :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt\right| \leq \max(e^x,1)\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt\right| = \max(e^x,1)\frac{|x|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$; c'est-à-dire que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge, avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Exercice 5.

(g) Par croissances comparées : $\left(\dfrac{e}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann, donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{e}{n}\right)^n$ converge.

(h) $\forall n \geq 1$:

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge d'après le critère de Riemann, donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ converge.

(i) On a : $0 \leq \dfrac{1}{n^2-\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, où $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann, donc, par équivalence, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2-\ln n}$ converge.

(j) On a : $0 \leq \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{e^{2n}} = \dfrac{1}{e^n}$, où $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{e^n}$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{e} \in \,]-1,1[$, donc convergente. Donc, par équivalence, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$ converge.

(k) On a : $0 \leq \dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2(\ln n)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}(\ln n)^3} \leq \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge d'après le critère de Riemann, donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2(\ln n)^3}$ converge.

(l) Si $a > 1$: $0 \leq \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a^n}$, où $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{a^n}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{a} \in \,]-1,1[$, donc convergente, donc, par équivalence, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$ converge.

Si $a < 1$: $0 \leq \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} \leq a^n$, où $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a^n$ est géométrique de raison $a \in \,]-1,1[$, donc convergente, donc, par équivalence, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$ converge.

Si $a = 1$: $\dfrac{a^n}{1+a^{2n}} = \dfrac{1}{2}$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ diverge grossièrement.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ converge si et seulement si $a \neq 1$.

(m) $\dfrac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}} = e^{n\ln(\ln n)-(\ln n)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$ diverge grossièrement.

(n)

$$\begin{aligned}
\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\\
&= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{24n}-\frac{1}{4n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{5}{24\sqrt{e}n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

donc $\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{5}{24\sqrt{e}n}$. Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge d'après le critère de Riemann, donc, par équivalence, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$ diverge.

(o) On a :

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3} &= n\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
&= n\left(1+\frac{a}{3n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)-1-\frac{3}{2n^2}\right)\\
&= \left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Par comparaison, $\sum O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge ; et $\sum\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{3}{2}\right)\dfrac{1}{n}$ converge si et seulement si $\dfrac{a}{3}-\dfrac{3}{2}=0$, c'est-à-dire $a=\dfrac{9}{2}$. Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$ converge si et seulement si $a=\dfrac{9}{2}$.

Exercice 6. Si $p \leq 1$: $u_n \geq \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n}$. Or, d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge, donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Si $p \geq 2$: $u_n \leq \dfrac{(n-1)\times(n-1)!}{(n+2)!}+\dfrac{n!}{(n+2)!} = \dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)}+\dfrac{1}{n+1)(n+2)} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or, d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exercice 7.

(a) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $u_n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$. Donc, par comparaison, $\sum u_n^2$ converge,

(b) $0 \le \dfrac{\sqrt{u_n}}{n} = \sqrt{\dfrac{u_n}{n^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$, donc, par comparaison, $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge,

(c) $0 \le \sqrt{u_n u_{2n}} \le \dfrac{1}{2}(u_n + u_{2n})$, donc, par comparaison, $\sum \sqrt{u_n u_{2n}}$ converge,

(d) $\dfrac{u_n}{1-u_n} = u_n + \underset{n\to+\infty}{O}(u_n^2)$, donc, par comparaison, $\sum \dfrac{u_n}{1-u_n}$ converge,

(e) $0 \le \dfrac{u_n}{1+u_n} \le u_n$ donc, par comparaison, $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Exercice 8. On a classiquement (cf le cours sur les suites extraites) : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) \ge n$, donc $\dfrac{\varphi(n)}{n^2} \ge \dfrac{1}{n}$. Or, d'après le critère de Riemann, $\sum\limits_{n\ge1} \dfrac{1}{n}$ diverge, donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\ge1} \dfrac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 9.

(a) Notons : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{(1+a_0)\cdots(1+a_n)}$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = v_{n-1}$, c'est-à-dire que la série $\sum\limits_{n\ge1} u_n$ est la série télescopique $\sum\limits_{n\ge1} v_{n-1} - v_n$. Or la suite (v_n) est décroissante et minorée par 0, donc convergente ; donc la série de terme général u_n converge.

(b) Notons ℓ la limite de la suite (v_n), on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = v_0 - \ell = \frac{1}{1+a_0} - \ell.$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1+a_0} \iff \ell = 0.$$

Si $\sum\limits_{n\ge0} a_n$ diverge : comme $(1+a_0)\cdots(1+a_n) \ge a_0 + \cdots + a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a : $\ell = 0$.

Si $\sum\limits_{n\ge0} a_n$ converge : alors $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $0 \le \ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$. Par équivalence, $\sum\limits_{n\ge0} \ln(1+a_n)$ converge donc, c'est-à-dire que $(w_n = \ln(v_n))$ converge. Donc $\ell \ne 0$.

Donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \dfrac{1}{1+a_0} \iff \sum\limits_{n\ge0} a_n$ diverge.

Exercice 10.

(a) La suite (u_n) est une suite récurrente associée à la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$. Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+$, intervalle stable par f, avec : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \le x$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc convergente. Sa limite est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire 0.

(b) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-u_n} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, donc : $e^{-S_n} = \dfrac{u_1}{u_0}\dfrac{u_2}{u_1}\cdots\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_{n+1}}{u_0} = u_{n+1}$, donc $S_n = -\ln(u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 12. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $\arctan$ (de classe C^∞) à l'ordre $2n+2 \in \mathbb{N}$ entre 0 et x :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \arctan^{(2n+3)}(t)dt,$$

avec :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \arctan^{(2n+3)}(t)dt \right| &\leq \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} dt \right| \\ &= \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x).$$

En particulier, pour $x = 1$, on retrouve la *formule de Madhava-Gregory-Leibniz* :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 13. Déterminer la nature des séries suivantes :

(d) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} - \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{2en} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc par comparaison, et d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}$ diverge.

(e) $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8n} + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, où $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge d'après le critère des séries alternées, $\displaystyle\sum \frac{1}{8n}$ diverge et $\displaystyle\sum O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ converge d'après le critère de Riemann. Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ diverge.

(f) Si $\alpha \leq 0$: $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ diverge grossièrement ;

Si $\alpha > 0$: $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - \dfrac{1}{n^{2\alpha}} + O\left(\dfrac{1}{n^{3\alpha}}\right)$, où $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le critère des séries alternées, et $\displaystyle\sum -\frac{1}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge, c'est-à-dire $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

(g) Si $\alpha \leq 0$: $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ diverge grossièrement ;

Si $\alpha > 0$: $\displaystyle\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5\alpha}{2}}}\right)$, où $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ converge d'après le critère des séries alternées, et $\displaystyle\sum -\frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5\alpha}{2}}}\right)$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}$ converge, c'est-à-dire $\alpha > \dfrac{2}{3}$.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{2}{3}$.

(h) On a :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right) &= \sin\left(n\pi \times \frac{1+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) \\
&= \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^n \sin\left(-\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

donc, d'après le critère des séries alternées et par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$ converge.

(i) $\displaystyle\frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ donc par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$ converge.