Formulaire de trigonométrie

La trigonométrie est apparue sur des écrits babyloniens avant le premier millénaire avant JC. Elle fut étudiée au premier millénaire après JC par les mathématiciens chinois, indiens et arabes.

Toutes les formules suivantes sont valables pour tous réels x et y, sous réserve d'existence des tangentes.

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0

Tangente

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \tfrac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Formules de base

$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \tan' x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \\ \tan(-x) = -\tan x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \\ \tan(\pi - x) = -\tan x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \tan(\pi + x) = \tan x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$

Résolution d'équations

$$\cos x = \cos y \iff \begin{cases} x = y + 2k\pi \\ \text{ou } x = -y + 2k\pi \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \sin y \iff \begin{cases} x = y + 2k\pi \\ \text{ou } x = \pi - y + 2k\pi \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan y \iff x = y + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Formules d'addition

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\ \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \end{cases}$$

Formules de duplication

$$\begin{cases} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \tan(2x) &= \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{cases}$$

Formules de linéarisation

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \\ \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \\ \cos x \sin x = \frac{\sin(2x)}{2} \end{cases}$$

Formules de transformation de produits en sommes

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = -\tfrac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

Formules de transformation de sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$

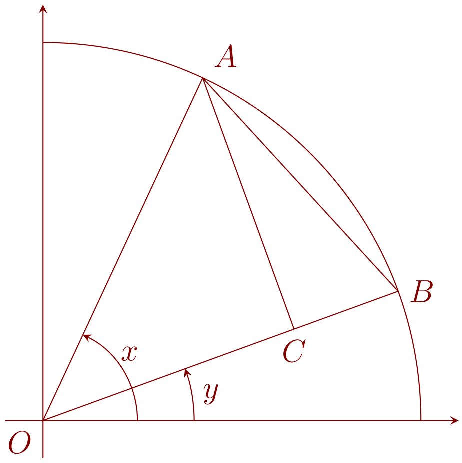
$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}$$

Formules de l'angle moitié en notant $t = \tan\frac{x}{2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

Démonstration de la formule pour $\cos(x-y)$ dans le cas où $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$



Deux moyens de mesurer la distance AB :

$$AB^2 = (\cos y - \cos x)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = \sin^2(x-y) + (1-\cos(x-y))^2$$

Démonstration pour $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$