Mathématiques

Chapitre C3
Variables aléatoires

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

I. Lois usuelles

Définition

X suit une loi constante ou certaine :

$$X(\Omega) = \{b\}$$

Proposition

$$E(X) = ? \qquad V(X) = ? \qquad \sigma(X) = ?$$

Proposition

$$E(X) = b \qquad V(X) = ? \qquad \sigma(X) = ?$$

Proposition

$$E(X) = b \qquad V(X) = 0 \qquad \sigma(X) = ?$$

Proposition

$$E(X) = b \qquad V(X) = 0 \qquad \sigma(X) = 0$$

Proposition

$$E(X) = b \qquad V(X) = 0 \qquad \sigma(X) = 0$$

▷ Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini.

Démontrer que X est constante si et seulement si sa variance est nulle.

Définition

X suit une loi uniforme de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ si :

- $X(\Omega) = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $\forall k \in X(\Omega) \qquad P(X = k) = \dfrac{1}{n}$

Définition

X suit une loi uniforme de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ si :

- $X(\Omega) = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $\forall k \in X(\Omega) \qquad P(X = k) = \dfrac{1}{n}$

On note $\quad X \sim \mathscr{U}(n) \qquad$ ou $\qquad X \hookrightarrow \mathscr{U}(n)$

Définition

X suit une loi uniforme de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ si :

- $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$
- $\forall k \in X(\Omega) \qquad P(X = k) = \dfrac{1}{n}$

Remarque

Il s'agit bien d'une loi de probabilité :

- $\forall k \in X(\Omega) \qquad P(X = k) \in [0, 1]$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = 1$

Proposition

$$E(X) = ?$$

$$V(X) = ? \qquad \sigma(X) = ?$$

Proposition

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12} \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$$

Proposition

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12} \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$$

Démonstration.

Voir exercice de cours 15 TD C1. $\square$

Remarque

Plus généralement X suit une loi uniforme sur un ensemble fini A si tous les $P(X = x)$ sont égaux.

Remarque

Plus généralement X suit une loi uniforme sur un ensemble fini A si tous les $P(X = x)$ sont égaux.

Dans ce cas $X(\Omega) = A$.

Remarque

Plus généralement X suit une loi uniforme sur un ensemble fini A si tous les $P(X = x)$ sont égaux.

Dans ce cas $X(\Omega) = A$.

On note $\quad X \sim \mathscr{U}(A) \quad$ ou $\quad X \hookrightarrow \mathscr{U}(A)$

Remarque

Plus généralement X suit une loi uniforme sur un ensemble fini A si tous les $P(X = x)$ sont égaux.

Dans ce cas $X(\Omega) = A$.

On note $\quad X \sim \mathcal{U}(A) \quad$ ou $\quad X \hookrightarrow \mathcal{U}(A)$

▷ Exercice 2.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $X(\Omega) = \{a, \ldots, b\}$. ($a$ et b entiers, $a < b$)
Déterminer l'espérance et la variance de X.

Définition

X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \qquad P(X=0) = q = 1-p$$

$$P(X=1) = p$$

Définition

X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \qquad P(X=0) = q = 1-p$$

$$P(X=1) = p$$

On note $X \sim \mathscr{B}(p)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$

Définition

X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \qquad P(X = 0) = q = 1 - p$$

$$P(X = 1) = p$$

On note $X \sim \mathscr{B}(1, p)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)$

Proposition

$$E(X) = ? \qquad V(X) = ? \qquad \sigma(X) = ?$$

▷ Exercice 3.

Compléter et démontrer la proposition ci-dessus.

Remarques

(i) La loi de Bernoulli est la loi indicatrice d'un événement A de probabilité p.
La variable aléatoire prend la valeur 1 si A a lieu et 0 sinon.

(ii) Une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli si et seulement si $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
Dans ce cas : $p = P(X = 1)$

Définition

- n expériences identiques et indépendantes
- A : événement de probabilité p
- X : nombre de fois que se réalise A

X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Définition

- n expériences identiques et indépendantes
- A : événement de probabilité p
- X : nombre de fois que se réalise A

X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

On note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

Proposition

$$X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$$

$$\forall k \in X(\Omega) \qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$E(X) = np \qquad V(X) = npq$$

Proposition

$$X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$$

$$\forall k \in X(\Omega) \qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Remarques

(i) Si $n = 1$ on retrouve bien la loi de Bernoulli, ce qui justifie la notation $\mathscr{B}(1, p)$ pour celle-ci.

(ii) Il s'agit bien d'une loi de probabilité de X.

Démonstration.

$$X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$$

Démonstration.

$$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$$

$$(X = k) = \underbrace{[A \qquad A \quad A \dots A \qquad\quad A]}_{n}$$

Démonstration.

$$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$$

$$(X = k) = \underbrace{[A\,\overline{A}\,\overline{A}\,A\,\overline{A}\,A\,\dots\,A\,\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,A]}_{n}$$

Démonstration.

$$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$$

$$(X = k) = \underbrace{[A\,\overline{A}\,\overline{A}\,A\,\overline{A}\,A\,\dots\,A\,\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,A]}_{n}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \square$$

Démonstration pour l'espérance.

Démonstration pour la variance.

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, P(X=k)$$

Démonstration pour la variance.

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k q^{n-k}$$

Démonstration pour la variance.

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k q^{n-k}$$

$$= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k}$$

Démonstration pour la variance.

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,P(X=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,\frac{n!}{k!(n-k)!}\,p^k q^{n-k}$$

$$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2}\,p^k q^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i}\,p^i q^{n-2-i}$$

Démonstration pour la variance.

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k q^{n-k}$$

$$= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} p^i q^{n-2-i} = n(n-1)p^2$$

Démonstration pour la variance (suite).

$\square$

▷ Exercice 4.

Bob joue à pile ou face avec Aldo, en utilisant une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. Bob donne 30 euros à Aldo, puis il jette dix fois la pièce. Il récupère 8 euros à chaque fois qu'il obtient pile.

Soit X le nombre de piles obtenus et Y le gain de Bob.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et en donner les paramètres et l'espérance.

▷ Exercice 4.

Bob joue à pile ou face avec Aldo, en utilisant une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. Bob donne 30 euros à Aldo, puis il jette dix fois la pièce. Il récupère 8 euros à chaque fois qu'il obtient pile.

Soit X le nombre de piles obtenus et Y le gain de Bob.

b. Exprimer Y en fonction de X, puis calculer $E(Y)$.

▷ Exercice 4.

Bob joue à pile ou face avec Aldo, en utilisant une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. Bob donne 30 euros à Aldo, puis il jette dix fois la pièce. Il récupère 8 euros à chaque fois qu'il obtient pile.

Soit X le nombre de piles obtenus et Y le gain de Bob.

c. À quelle condition Bob a-t-il intérêt à jouer ?

Définitions

Un couple de variables aléatoires est un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un même univers.

Définitions

Un couple de variables aléatoires est un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un même univers.

Exemple 1

On jette deux dés.
On nomme X et Y les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro obtenu.

Définitions

Un couple de variables aléatoires est un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un même univers.

Loi conjointe du couple (X, Y) :

$$P(X = x \ \cap \ Y = y) \qquad \begin{array}{l} x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \end{array}$$

Définitions

Un couple de variables aléatoires est un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un même univers.

Loi conjointe du couple (X, Y) :

$$P(X = x, Y = y) \qquad \begin{array}{l} x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \end{array}$$

Définitions

Un couple de variables aléatoires est un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un même univers.

Loi conjointe du couple (X, Y) :

$$P(X = x \ \cap \ Y = y) \qquad \begin{array}{l} x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \end{array}$$

Les lois marginales du couple (X, Y) sont les lois de X et de Y.

Remarque (autre définition)

Un couple de variables aléatoires sur Ω est une fonction vectorielle :

$$\begin{aligned} h : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(X = x) \cap (Y = y) = h^{-1}(\{(x, y)\})$$

Proposition

$\forall x \in X(\Omega)$

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \ \cap \ Y = y)$$

$\forall y \in Y(\Omega)$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \ \cap \ Y = y)$$

Démonstration.
La famille $\{Y = y \mid y \in Y(\Omega)\}$ est un système complet d'événements.

Formule des probabilités totales :

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{Y=y}(X = x)\, P(Y = y) \qquad \square$$

Remarques

(i) $$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \ \cap \ Y = y) = 1$$

Remarques

(i) $$\sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \ \cap \ Y = y) = 1$$

Remarques

(i) $$\sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \ \cap \ Y = y) = 1$$

(ii) La connaissance de la loi conjointe du couple (X, Y) permet de retrouver les lois marginales, alors que la connaissance des lois marginales ne permet pas de retrouver la loi conjointe.

▷ Exercice 5.

Sac contenant : n jetons de 1 à n. $\quad (n \geqslant 2)$

On pioche l'un après l'autre deux jetons de ce sac.

X : premier numéro obtenu
Y : second numéro obtenu.

a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). En déduire ses lois marginales, et leurs espérances et variances.

Définition

(X, Y) couple de variables aléatoires.

X et Y suivent la même loi si :

$$X(\Omega) = Y(\Omega)$$

$$\text{et} \quad \forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = P(Y = x)$$

On note alors $X \sim Y$.

Définition

(X, Y) couple de variables aléatoires.

X et Y suivent la même loi si :

$$X(\Omega) = Y(\Omega)$$

$$\text{et} \quad \forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = P(Y = x)$$

On note alors $X \sim Y$.

Remarque

Ceci ne signifie pas que X et Y sont égales.

Définition

(X, Y) couple de variables aléatoires.

X et Y suivent la même loi si :

$$X(\Omega) = Y(\Omega)$$

$$\text{et} \quad \forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = P(Y = x)$$

On note alors $X \sim Y$.

Exemple

On jette deux dés. Soit X et Y leurs numéros.
Alors $X \neq Y$ mais $X \sim Y$.

Définition

(X, Y) couple de variables aléatoires.

X et Y suivent la même loi si :

$$X(\Omega) = Y(\Omega)$$

$$\text{et} \quad \forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = P(Y = x)$$

On note alors $X \sim Y$.

Proposition

Soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction

Si $\quad X \sim Y \quad$ alors $\quad f(X) \sim f(Y)$.

Proposition - Croissance

$$X \leqslant Y \qquad \Longrightarrow \qquad E(X) \leqslant E(Y)$$

Proposition - Croissance

$$X \leqslant Y \qquad \Longrightarrow \qquad E(X) \leqslant E(Y)$$

Démonstration.

$$X \leqslant Y$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) \leqslant Y(\omega)$$

Proposition - Croissance

$$X \leqslant Y \qquad \Longrightarrow \qquad E(X) \leqslant E(Y)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & X \leqslant Y \\ \iff \quad & \forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) \leqslant Y(\omega) \\ \implies \quad & \forall \omega \in \Omega \quad X(\omega)P(\{\omega\}) \leqslant Y(\omega)P(\{\omega\}) \end{aligned}$$

Proposition - Croissance

$$X \leqslant Y \qquad \Longrightarrow \qquad E(X) \leqslant E(Y)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& X \leqslant Y \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) \leqslant Y(\omega) \\
\Longrightarrow \quad & \forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) P(\{\omega\}) \leqslant Y(\omega) P(\{\omega\}) \\
\Longrightarrow \quad & \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) \leqslant \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\{\omega\})
\end{aligned}$$

Proposition - Croissance

$$X \leqslant Y \implies E(X) \leqslant E(Y)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& X \leqslant Y \\
\iff & \forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) \leqslant Y(\omega) \\
\implies & \forall \omega \in \Omega \quad X(\omega)P(\{\omega\}) \leqslant Y(\omega)P(\{\omega\}) \\
\implies & \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) \leqslant \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}) \\
\iff & E(X) \leqslant E(Y) \qquad \square
\end{aligned}$$

Exemple

On jette deux dés.

Soit X_1 le numéro du premier dé
et X_2 le numéro du second dé.

Soit $X = \mathrm{Max}\,\{X_1, X_2\}$.

Théorème de transfert généralisé

(X, Y) couple de variables aléatoires

$f : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$

Alors

$$E(f(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x,y) P(X = x \cap Y = y)$$

Démonstration. $Z = (X, Y)$

$$E(f(Z)) = \sum_{\omega \in \Omega} f(Z(\omega))P(\{\omega\})$$

Démonstration. $Z = (X, Y)$

$$E(f(Z)) = \sum_{\omega\in\Omega} f(Z(\omega))P(\{\omega\})$$
$$= \sum_{\omega\in\Omega} f(X(\omega), Y(\omega))P(\{\omega\})$$

<u>Démonstration</u>. $Z = (X, Y)$

$$\begin{aligned} E(f(Z)) &= \sum_{\omega \in \Omega} f(Z(\omega))P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega), Y(\omega))P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x \\ Y(\omega)=y}} f(X(\omega), Y(\omega))P(\{\omega\}) \end{aligned}$$

<u>Démonstration</u>. $Z = (X, Y)$

$$
\begin{aligned}
E(f(Z)) &= \sum_{\omega \in \Omega} f(Z(\omega)) P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega), Y(\omega)) P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x \\ Y(\omega)=y}} f(X(\omega), Y(\omega)) P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\omega)} f(x, y) \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x \\ Y(\omega)=y}} P(\{\omega\})
\end{aligned}
$$

Démonstration. $Z = (X, Y)$

$$
\begin{aligned}
E(f(Z)) &= \sum_{\omega \in \Omega} f(Z(\omega)) P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega), Y(\omega)) P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x \\ Y(\omega)=y}} f(X(\omega), Y(\omega)) P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\omega)} f(x, y) \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x \\ Y(\omega)=y}} P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x, y) P(X = x \cap Y = y) \quad \square
\end{aligned}
$$

Théorème de transfert généralisé

(X, Y) couple de variables aléatoires

$f : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$

Alors

$$E(f(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x,y) P(X = x \cap Y = y)$$

Exemple

$$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy P(X = x \cap Y = y)$$

Définition

A événement

X variable aléatoire

Loi de X conditionnée par A ou loi de X sachant A :

$$\forall x \in X(\Omega) \qquad P_A(X = x)$$

Définition

(X, Y) couple de variables aléatoires

Loi de X conditionnée par Y ou loi de X sachant Y :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \qquad P_{Y=y}(X = x)$$

▷ Exercice 5. (suite)

Sac contenant : n jetons de 1 à n. $(n \geqslant 2)$

On pioche l'un après l'autre deux jetons de ce sac.

X : premier numéro obtenu
Y : second numéro obtenu.

b. Déterminer directement la loi de X.
c. Donner, pour tout $i \in X(\Omega)$, la loi de Y conditionnée par $X = i$.
d. Retrouver ainsi la loi conjointe du couple (X, Y).

II. Couples de variables aléatoires

Proposition

(X, Y) couple de variables aléatoires finies

telles que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$

$Z = X + Y$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k \ \cap \ Y = n - k)$$

Démonstration.

$\{X = k \mid 0 \leqslant k \leqslant N\}$ SCE

Formule de probabilités totales :

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{N} P_{X=k}(Z = n) P(X = k)$$

Démonstration. (suite).

$$\begin{aligned}
P(Z=n) &= \sum_{k=0}^{N} P_{X=k}(Z=n)P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} P(Z=n \cap X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} P(Y=n-k \cap X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(Y=n-k \cap X=k)
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème - Linéarité de l'espérance

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Théorème - Linéarité de l'espérance

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Remarque

Si Y obéit à une loi certaine égale à 1 on retrouve la formule $E(aX+b) = aE(X) + b$.

Remarque

En général

$$V(X+Y) \neq V(X)+V(Y)$$
$$\sigma(X+Y) \neq \sigma(X)+\sigma(Y)$$

Théorème - Linéarité de l'espérance

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Démonstration.

Théorème - Linéarité de l'espérance

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Démonstration.

$\square$

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y))$$

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(XE(Y)) - E(E(X)Y) \\ + E(E(X)E(Y))$$

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \qquad \square$$

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Remarque

Par théorème de transfert généralisé :

$$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xyP(X = x \cap Y = y)$$

▷ Exercice 5. (suite)

Sac contenant : n jetons de 1 à n. $(n \geqslant 2)$

On pioche l'un après l'autre deux jetons de ce sac.

X : premier numéro obtenu
Y : second numéro obtenu.

e. Calculer la covariance du couple (X, Y).

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Remarques

(i) Pour toute variable aléatoire X :

$$\mathrm{Cov}(X, X) =$$

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Remarques

(i) Pour toute variable aléatoire X :

$$\mathrm{Cov}(X, X) = V(X)$$

Définition

La covariance du couple (X,Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Remarques

(ii) La covariance peut être positive ou négative.

Lorsqu'elle est négative, Y prend des grandes valeurs quand X en prend des petites.

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Remarques

(iii) De façon analogue à $V(aX + b) = a^2 V(X)$:

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) =$$

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Remarques

(iii) De façon analogue à $V(aX + b) = a^2V(X)$:

$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

$$\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Définition

La covariance du couple (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Remarques

(iii) De façon analogue à $V(aX + b) = a^2 V(X)$:

$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

$$\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Nous verrons que la covariance est bilinéaire.

Proposition

$$V(X+Y)=$$

Démonstration.

Proposition

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Démonstration.

$\square$

Proposition

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Démonstration.

$\square$

Remarque

La covariance peut donc être calculée par la formule :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) =$$

Proposition

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Démonstration.

$\square$

Remarque

La covariance peut donc être calculée par la formule :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}(V(X+Y) - V(X) - V(Y))$$

III. Indépendance

A. Variables aléatoires indépendantes

B. Indépendance et corrélation

C. Application la loi binomiale

Définition

X et Y sont indépendantes si :

$\forall x \in X(\Omega) \qquad \forall y \in Y(\Omega)$

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Définition

X et Y sont indépendantes si :

$\forall x \in X(\Omega) \qquad \forall y \in Y(\Omega)$

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

On note alors $\quad X \perp\!\!\!\perp Y$

Définition

X et Y sont indépendantes si :

$\forall x \in X(\Omega) \qquad \forall y \in Y(\Omega)$

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Remarque

X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$\forall y \in Y(\Omega) \qquad \forall x \in X(\Omega)$

$$P_{Y=y}(X = x) = P(X = x)$$

Définition

X et Y sont indépendantes si :

$\forall x \in X(\Omega) \qquad \forall y \in Y(\Omega)$

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Proposition

X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$\forall A \subseteq X(\Omega) \qquad \forall B \subseteq Y(\Omega)$

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

Démonstration. Sens indirect :

$$\begin{aligned}
P(X = x \cap Y = y) &= P(X \in \{x\} \cap Y \in \{y\}) \\
&= P((X, Y) \in \{x\} \times \{y\}) \\
&= P(X \in \{x\}) \times P(Y \in \{y\}) \\
&= P(X = x) \times P(Y = y)
\end{aligned}$$

Démonstration. Sens direct :

$$P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

$$= \sum_{a \in A} P(X = a) \times \sum_{b \in B} P(Y = b)$$

Démonstration. Sens direct :

$$
\begin{aligned}
P(X \in A) \times P(Y \in B) \\
&= \sum_{a \in A} P(X = a) \times \sum_{b \in B} P(Y = b) \\
&= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a) \times P(Y = b)
\end{aligned}
$$

Démonstration. Sens direct :

$$\begin{aligned}
P(X \in A) \times P(Y \in B) \\
&= \sum_{a\in A} P(X = a) \times \sum_{b\in B} P(Y = b) \\
&= \sum_{a\in A} \sum_{b\in B} P(X = a) \times P(Y = b) \\
&= \sum_{a\in A} \sum_{b\in B} P(X = a \cap Y = b)
\end{aligned}$$

Démonstration. Sens direct :

$$P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

$$= \sum_{a \in A} P(X = a) \times \sum_{b \in B} P(Y = b)$$

$$= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a) \times P(Y = b)$$

$$= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a \cap Y = b)$$

$$= \sum_{(a,b) \in A \times B} P(X = a \cap Y = b)$$

Démonstration. Sens direct :

$$
\begin{aligned}
P(X \in A) \times P(Y \in B) & \\
&= \sum_{a \in A} P(X = a) \times \sum_{b \in B} P(Y = b) \\
&= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a) \times P(Y = b) \\
&= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a \cap Y = b) \\
&= \sum_{(a,b) \in A \times B} P(X = a \cap Y = b) \\
&= P((X, Y) \in A \times B) \qquad \square
\end{aligned}
$$

Définition

X et Y sont indépendantes si :

$\forall x \in X(\Omega) \qquad \forall y \in Y(\Omega)$

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Remarque

Si deux variables aléatoires sont indépendantes alors on peut retrouver leur loi conjointe à partir de leurs lois marginales.

Exemple 3

X et Y indépendantes.

x	0	3	5	6
$P(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

y	1	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{10}$

▷ Exercice 5. (suite)

Sac contenant : n jetons de 1 à n. $(n \geqslant 2)$

On pioche l'un après l'autre deux jetons de ce sac.

X : premier numéro obtenu
Y : second numéro obtenu.

f. X et Y sont-elles indépendantes ?

Proposition

Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Proposition

Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Exemple

Si X et Y sont indépendantes alors X^2 et Y^2 sont indépendantes.

Proposition

Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Démonstration. Soit $x \in f(X(\Omega))$ et $y \in g(Y(\Omega))$.

$$\begin{aligned} P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y) \\ &= P(X \in f^{-1}(\{x\})) \times P(Y \in g^{-1}(\{y\})) \end{aligned}$$

Proposition

Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Démonstration. Soit $x \in f(X(\Omega))$ et $y \in g(Y(\Omega))$.

$$\begin{aligned} P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y) &= P(X \in f^{-1}(\{x\})) \times P(Y \in g^{-1}(\{y\})) \\ &= P\big((X, Y) \in f^{-1}(\{x\}) \times g^{-1}(\{y\})\big) \end{aligned}$$

Proposition

Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Démonstration. Soit $x \in f(X(\Omega))$ et $y \in g(Y(\Omega))$.

$$\begin{aligned}
P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y) \\
&= P(X \in f^{-1}(\{x\})) \times P(Y \in g^{-1}(\{y\})) \\
&= P\big((X, Y) \in f^{-1}(\{x\}) \times g^{-1}(\{y\})\big) \\
&= P\Big(\big(X \in f^{-1}(\{x\})\big) \cap \big(Y \in g^{-1}(\{y\})\big)\Big)
\end{aligned}$$

Proposition

Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Démonstration. Soit $x \in f(X(\Omega))$ et $y \in g(Y(\Omega))$.

$$\begin{aligned}
P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y) \\
&= P(X \in f^{-1}(\{x\})) \times P(Y \in g^{-1}(\{y\})) \\
&= P\big((X, Y) \in f^{-1}(\{x\}) \times g^{-1}(\{y\})\big) \\
&= P\Big(\big(X \in f^{-1}(\{x\})\big) \cap \big(Y \in g^{-1}(\{y\})\big)\Big) \\
&= P((f(X) = x) \cap (g(Y) = y)) \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque

On généralise la notion de couple de variables aléatoires aux n-uplets de variables aléatoires définies sur un même univers Ω.

$$\begin{aligned}(X_1, \ldots, X_n) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega &\longmapsto (X_1(\omega), \ldots X_n(\omega))\end{aligned}$$

Définition

Des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

Définition

Des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

Remarque

Inutile de restreindre aux sous-ensembles d'indices $J \subseteq I = \{1, \ldots, n\}$.

Proposition

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si :

Pour tout $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}(X_i(\Omega))$

les événements $(X_i \in A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants.

Remarque

L'indépendance mutuelle implique l'indépendance mutuelle de toute sous-famille.

$$P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2))$$

$$= P((X_1 \in \{x_1\}) \cap (X_2 \in \{x_2\}) \cap (X_3 \in X_3(\Omega)))$$

$$= P(X_1 \in \{x_1\}) \times P(X_2 \in \{x_2\}) \times P(X_3 \in X_3(\Omega))$$

$$= P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times 1$$

$$= P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2)$$

Proposition (lemme des coalitions)

$X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes

$$f : \prod_{i=1}^{p} X_i(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g : \prod_{i=p+1}^{n} X_i(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Proposition (lemme des coalitions)

$X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes

$$\begin{aligned} f :\ & \prod_{i=1}^{p} X_i(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^p && \longrightarrow \mathbb{R} \\ g :\ & \prod_{i=p+1}^{n} X_i(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^{n-p} && \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

Alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration. Admise. $\square$

Proposition (lemme des coalitions)

$X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes

$$f : \prod_{i=1}^{p} X_i(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g : \prod_{i=p+1}^{n} X_i(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque

Ce lemme se généralise à plusieurs coalitions.

Remarque

Pour tout couple de variable aléatoire (X, Y) :

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{1}{2}(V(X+Y) - V(X) - V(Y)) \end{aligned}$$

Remarque

Pour tout couple de variable aléatoire (X, Y) :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{1}{2}(V(X+Y) - V(X) - V(Y))\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Cov}(X,Y) = 0 \\ \iff \quad & E(XY) = E(X)E(Y) \\ \iff \quad & V(X+Y) = V(X) + V(Y)\end{aligned}$$

Remarque

Pour tout couple de variable aléatoire (X, Y) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{1}{2}(V(X+Y) - V(X) - V(Y))\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \\ \iff \quad & E(XY) = E(X)E(Y) \\ \iff \quad & V(X+Y) = V(X) + V(Y)\end{aligned}$$

On dit alors X et Y sont décorrélées.

Proposition

Si X et Y sont indépendantes alors :

(i) $E(XY) = E(X)E(Y)$

(ii) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

(iii) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$

La réciproque est fausse en général.

Proposition

Si X et Y sont indépendantes alors :

(i) $E(XY) = E(X)E(Y)$

(ii) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

(iii) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

La réciproque est fausse en général.

Démonstration.

Proposition

Si X et Y sont indépendantes alors :

(i) $E(XY) = E(X)E(Y)$

(ii) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

(iii) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

La réciproque est fausse en général.

Démonstration.

$\square$

Remarques

(i) La propriété :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

est toujours vraie, alors que la propriété :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

est vraie si X et Y sont indépendantes.

Remarques

(i) La propriété :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

est toujours vraie, alors que la propriété :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

est vraie si X et Y sont indépendantes.

(ii) Si X et Y sont indépendantes alors :

$$V(X-Y) =$$

Remarques

(i) La propriété :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

est toujours vraie, alors que la propriété :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

est vraie si X et Y sont indépendantes.

(ii) Si X et Y sont indépendantes alors :

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y)$$

▷ Exercice 6.

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

Vérifier que la réciproque de la proposition précédente est fausse grâce à cet exemple.

Corollaire

Si $X_1, \dots, X_n$ sont deux-à-deux indépendantes alors :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

Corollaire

Si $X_1, \dots, X_n$ sont deux-à-deux indépendantes alors :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

Démonstration. La formule

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

permet de démontrer par récurrence que :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Corollaire

Si $X_1, \dots, X_n$ sont deux-à-deux indépendantes alors :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$$

Démonstration.

$$V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Si X_i et X_j sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$, d'où le corollaire. $\square$

Remarque

X, Y non constantes.

Coefficient de corrélation linéaire :

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Remarque

X, Y non constantes.

Coefficient de corrélation linéaire :

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

- $-1 \leqslant r \leqslant 1$

Remarque

X, Y non constantes.

Coefficient de corrélation linéaire :

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

- $-1 \leqslant r \leqslant 1$
- Si X et Y sont indépendantes alors $r = 0$.

Remarque

X, Y non constantes.

Coefficient de corrélation linéaire :

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

- $-1 \leqslant r \leqslant 1$
- Si X et Y sont indépendantes alors $r = 0$.
- Si $r = \pm 1$ alors : $\quad P(Y = aX + b) = 1$

Remarque

X, Y non constantes.

Coefficient de corrélation linéaire :

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

- $-1 \leqslant r \leqslant 1$
- Si X et Y sont indépendantes alors $r = 0$.
- Si $r = \pm 1$ alors : $\quad P(Y = aX + b) = 1$

  a est positif si $r = 1$, négatif si $r = -1$.

▷ Exercice 5. (suite)

Sac contenant : n jetons de 1 à n. $(n \geqslant 2)$

On pioche l'un après l'autre deux jetons de ce sac.

X : premier numéro obtenu
Y : second numéro obtenu.

g. Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).
Que peut-on dire de ses valeurs extrêmes ?

III. Indépendance

A. Variables aléatoires indépendantes

B. Indépendance et corrélation

C. Application la loi binomiale

Lemme

X, Y indépendantes

X suit une loi $\mathscr{B}(n, p)$

Y suit une loi $\mathscr{B}(1, p)$

Alors $Z = X + Y$ suit une loi $\mathscr{B}(n+1, p)$.

Lemme

X, Y indépendantes

X suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$

Y suit une loi $\mathscr{B}(1,p)$

Alors $Z = X + Y$ suit une loi $\mathscr{B}(n+1,p)$.

Démonstration.

On note $q = 1 - p$ et $Z = X + Y$.

Lemme

X, Y indépendantes

X suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$

Y suit une loi $\mathscr{B}(1,p)$

Alors $Z = X + Y$ suit une loi $\mathscr{B}(n+1,p)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P(X=0 \cap Y=0) \\ &= P(X=0)P(Y=0) = q^{n+1} \\ P(Z=n+1) &= P(X=n \cap Y=1) \\ &= P(X=n)P(Y=1) = p^{n+1} \end{aligned}$$

Démonstration. (suite)

Finalement $Z(\Omega) = \{0, \ldots, n+1\}$ et

$$\forall k \in Z(\Omega) \qquad P(Z = k) = \binom{n+1}{k} p^k q^{n+1-k}$$

donc Z suit une loi $\mathscr{B}(n+1, p)$. $\square$

Corollaire

$X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes,
suivant toutes une loi $\mathscr{B}(1, p)$

Alors $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi $\mathscr{B}(n, p)$.

Corollaire

$X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes,
suivant toutes une loi $\mathscr{B}(1,p)$

Alors $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$.

Démonstration.

Par récurrence sur n, en appliquant le lemme. $\square$

Remarque

On retrouve l'espérance et la variance d'une loi binomiale.

$$
\begin{aligned}
X &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \qquad\qquad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^{n} p = np
\end{aligned}
$$

Remarque

On retrouve l'espérance et la variance d'une loi binomiale.

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ V(X) &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \qquad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{i=1}^{n} pq = npq \end{aligned}$$

Corollaire

X, Y indépendantes

X suit une loi $\mathscr{B}(n, p)$, Y suit une loi $\mathscr{B}(m, p)$.

Alors $Z = X + Y$ suit une loi $\mathscr{B}(n + m, p)$.

Corollaire

X, Y indépendantes

X suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$, Y suit une loi $\mathscr{B}(m,p)$.

Alors $Z = X + Y$ suit une loi $\mathscr{B}(n+m,p)$.

<u>Démonstration</u>.

On pose $Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k$.

On applique le lemme m fois. $\square$

Théorème : Inégalité de Markov

X positive.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Théorème : Inégalité de Markhov

X positive.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Remarques

(i) Ce théorème est très général, il est valable pour toute variable aléatoire dès qu'elle admet une espérance.

Théorème : Inégalité de Markhov

X positive.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Remarques

(ii) Si a grandit alors X a de moins en moins de chances d'être supérieur à a.

$$\lim_{a \to +\infty} P(X \geqslant a) = 0$$

Théorème : Inégalité de Markhov

X positive.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Remarques

(iii) L'inégalité est évidente si $a \leqslant E(X)$:

$$\forall a \geqslant E(X) \qquad P(X \geqslant a) \leqslant 1 \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Théorème : Inégalité de Markhov

X positive.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration.

Théorème : Inégalité de Markhov

X positive.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration.

$\square$

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

Remarques

(i) Ce théorème est très général, il est valable pour toute variable aléatoire dès qu'elle admet une espérance et une variance.

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

Remarques

(ii) Si a est grand alors X est rarement hors de l'intervalle $]E(X) - a, E(X) + a[$.

Une variable aléatoire est rarement éloignée de sa moyenne.

La variance est un paramètre de dispersion.

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

Remarques

(iii) L'inégalité est évidente si $a \leqslant \sigma(X)$:

$$\forall a \leqslant \sigma(X) \qquad P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant 1 \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration. Soit $Y = (X - E(X))^2$.

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

<u>Démonstration</u>. Soit $Y = (X - E(X))^2$.

Cette variable aléatoire est positive donc :

$$\forall a > 0 \qquad P(Y \geqslant a^2) \leqslant \frac{E(Y)}{a^2}$$

$$\iff$$

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration. Soit $Y = (X - E(X))^2$.

Cette variable aléatoire est positive donc :

$$\forall a > 0 \qquad P(Y \geqslant a^2) \leqslant \frac{E(Y)}{a^2}$$

$$\iff \quad P((X - E(X))^2 \geqslant a^2) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration. Soit $Y = (X - E(X))^2$.

Cette variable aléatoire est positive donc :

$$\forall a > 0 \qquad P(Y \geqslant a^2) \leqslant \frac{E(Y)}{a^2}$$

$$\iff \qquad P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2} \qquad \square$$

Prochain chapitre

Chapitre A12

Séries