Mathématiques

Chapitre C2
Dénombrement

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

I. Cardinal

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments.

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments.

Notations

$$\operatorname{Card} E \qquad \# E \qquad |E|$$

Propositions

E un ensemble fini $\qquad F \subseteq E$

(i) F est finie

(ii) $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$

(iii) $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E \qquad \Longleftrightarrow \qquad F = E$

Propositions

E, F finis $\qquad f : E \to F$

(i) f injective $\implies \mathrm{Card}\, E \leqslant \mathrm{Card}\, F$

Propositions

E, F finis $\qquad f : E \to F$

(i) f injective $\implies \operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$

(ii) f surjective $\implies \operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$

Propositions

E, F finis $\qquad f : E \to F$

(i) f injective $\implies \operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$

(ii) f surjective $\implies \operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$

(iii) f bijective $\implies \operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$

Propositions

E, F finis $\qquad f : E \to F$

(i) f injective $\implies \operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$

(ii) f surjective $\implies \operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$

(iii) f bijective $\implies \operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$

(iv) Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ alors :

f injective $\iff$

Propositions

E, F finis $\qquad f : E \to F$

(i) f injective $\implies$ $\mathrm{Card}\, E \leqslant \mathrm{Card}\, F$

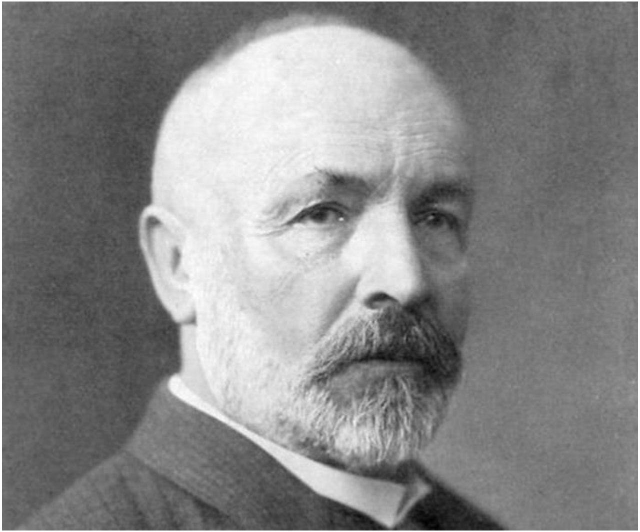
(ii) f surjective $\implies$ $\mathrm{Card}\, E \geqslant \mathrm{Card}\, F$

(iii) f bijective $\implies$ $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, F$

(iv) Si $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, F$ alors :

f injective $\iff$ f bijective $\iff$ f surjective

Georg Cantor
(Allemagne) 1845 – 1918



Définition

Deux ensembles (finis ou infinis) ont même cardinal s'il existe une bijection de l'un dans l'autre.

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont de même cardinal

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont de même cardinal

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \\
0 & \longmapsto & 0 \\
1 & \longmapsto & \\
2 & \longmapsto & 1 \\
3 & \longmapsto & \\
4 & \longmapsto & 2 \\
5 & \longmapsto & \\
\vdots & &
\end{array}
$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont de même cardinal

$$
\begin{array}{ccl}
\mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \\
0 & \longmapsto & 0 \\
1 & \longmapsto & -1 \\
2 & \longmapsto & 1 \\
3 & \longmapsto & -2 \\
4 & \longmapsto & 2 \\
5 & \longmapsto & -3 \\
\vdots & &
\end{array}
$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont de même cardinal

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \\
0 & \longmapsto & 0 \\
1 & \longmapsto & -1 \\
2 & \longmapsto & 1 \\
3 & \longmapsto & -2 \\
4 & \longmapsto & 2 \\
5 & \longmapsto & -3 \\
\vdots & & \\
n & \longmapsto &
\end{array}$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont de même cardinal

$$\begin{array}{ccl}
\mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \\
0 & \longmapsto & 0 \\
1 & \longmapsto & -1 \\
2 & \longmapsto & 1 \\
3 & \longmapsto & -2 \\
4 & \longmapsto & 2 \\
5 & \longmapsto & -3 \\
\vdots & & \\
n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}
\end{array}$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont de même cardinal

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\hookrightarrow \mathbb{Q} \\ n &\longmapsto n \end{aligned}$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont de même cardinal

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\hookrightarrow \mathbb{Q} \\ n &\longmapsto n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{N} \\ \frac{p}{q} &\longmapsto \begin{cases} 2^q 3^p & \text{si } p \geqslant 0 \\ 2^q 5^{-p} & \text{si } p < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas de même cardinal

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\sim} \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\xrightarrow{\sim}]0,1[\\ x &\longmapsto \arctan x \end{aligned}$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas de même cardinal

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\sim} & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \xrightarrow{\sim} &]0,1[\\ x & \longmapsto & \arctan x & & \\ & & x & \longmapsto & \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \end{array}$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas de même cardinal

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\sim} & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \xrightarrow{\sim} &]0,1[\\ x & \longmapsto & \arctan x & & \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\operatorname{Card} \mathbb{R} = \operatorname{Card}]0,1[$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas de même cardinal

Par l'absurde

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\sim}]0,1[$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas de même cardinal

Par l'absurde

$$\begin{array}{ccl}
\mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} &]0,1[\\
0 & \longmapsto & 0{,}5304395\ldots \\
1 & \longmapsto & 0{,}1322000\ldots \\
2 & \longmapsto & 0{,}0000000\ldots \\
3 & \longmapsto & 0{,}8849254\ldots \\
4 & \longmapsto & 0{,}7563478\ldots \\
5 & \longmapsto & 0{,}1044332\ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas de même cardinal

Par l'absurde

$$\begin{array}{ccl}
\mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} &]0,1[\\
0 & \longmapsto & 0{,}\mathbf{5}304395\ldots \\
1 & \longmapsto & 0{,}1\mathbf{3}22000\ldots \\
2 & \longmapsto & 0{,}00\mathbf{0}0000\ldots \\
3 & \longmapsto & 0{,}884\mathbf{9}254\ldots \\
4 & \longmapsto & 0{,}7563\mathbf{4}78\ldots \\
5 & \longmapsto & 0{,}10443\mathbf{3}2\ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas de même cardinal

Par l'absurde

$$
\begin{array}{ccl}
\mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} &]0,1[\\
0 & \longmapsto & 0{,}\textcolor{red}{5}304395\ldots \\
1 & \longmapsto & 0{,}1\textcolor{red}{3}22000\ldots \\
2 & \longmapsto & 0{,}00\textcolor{red}{0}0000\ldots \\
3 & \longmapsto & 0{,}884\textcolor{red}{9}254\ldots \\
4 & \longmapsto & 0{,}7563\textcolor{red}{4}78\ldots \\
5 & \longmapsto & 0{,}10443\textcolor{red}{3}2\ldots \\
\vdots & & \vdots \\
\hline
 & & \textcolor{red}{0{,}6410543}\ldots
\end{array}
$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas de même cardinal

Par l'absurde

$$
\begin{array}{ccl}
\mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} &]0,1[\\
0 & \longmapsto & 0{,}\mathbf{5}304395\ldots \\
1 & \longmapsto & 0{,}1\mathbf{3}22000\ldots \\
2 & \longmapsto & 0{,}00\mathbf{0}0000\ldots \\
3 & \longmapsto & 0{,}884\mathbf{9}254\ldots \\
4 & \longmapsto & 0{,}7563\mathbf{4}78\ldots \\
5 & \longmapsto & 0{,}10443\mathbf{3}2\ldots \\
\vdots & & \vdots \\
\hline
? & \longmapsto & 0{,}6410543\ldots
\end{array}
$$

Hypothèse du continu

$$\operatorname{Card} \mathbb{N} \qquad < \qquad \operatorname{Card} \mathbb{R}$$

Hypothèse du continu

$$\begin{array}{rlcrl} & \operatorname{Card} \mathbb{N} & < & & \operatorname{Card} \mathbb{R} \\ = & \operatorname{Card} \mathbb{Z} & & = & \operatorname{Card} \mathbb{C} \\ = & \operatorname{Card} \mathbb{Q} & & = & \operatorname{Card} \mathscr{P}(\mathbb{N}) \end{array}$$

Hypothèse du continu

$$\begin{array}{rlcrl} & \operatorname{Card}\mathbb{N} & < & & \operatorname{Card}\mathbb{R} \\ = & \operatorname{Card}\mathbb{Z} & & = & \operatorname{Card}\mathbb{C} \\ = & \operatorname{Card}\mathbb{Q} & & = & \operatorname{Card}\mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ & \aleph_0 & < & & \mathscr{C} \end{array}$$

Hypothèse du continu

$$\begin{array}{rcccl} & \operatorname{Card}\mathbb{N} & < & & \operatorname{Card}\mathbb{R} \\ = & \operatorname{Card}\mathbb{Z} & & = & \operatorname{Card}\mathbb{C} \\ = & \operatorname{Card}\mathbb{Q} & & = & \operatorname{Card}\mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ & \aleph_0 & < & & \mathscr{C} \end{array}$$

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \mathscr{C} \quad ?$$

Hypothèse du continu

$$\begin{array}{rlcrl} & \operatorname{Card} \mathbb{N} & < & & \operatorname{Card} \mathbb{R} \\ = & \operatorname{Card} \mathbb{Z} & & = & \operatorname{Card} \mathbb{C} \\ = & \operatorname{Card} \mathbb{Q} & & = & \operatorname{Card} \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ & \aleph_0 & < & & \mathscr{C} \end{array}$$

$$\aleph_0 < \aleph_1 = \mathscr{C} \quad ?$$

Propositions

E ensemble fini

(i) Pour tout $F \subseteq E$:

$$\mathrm{Card}\,\overline{F} =$$

Propositions

E ensemble fini

(i) Pour tout $F \subseteq E$:

$$\operatorname{Card} \overline{F} = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} F$$

(ii) Pour tous $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$:

$\operatorname{Card}(F \cup G) =$

Propositions

E ensemble fini

(i) Pour tout $F \subseteq E$:

$$\operatorname{Card} \overline{F} = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} F$$

(ii) Pour tous $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$:

$$\operatorname{Card}(F \cup G) = \operatorname{Card} F + \operatorname{Card} G - \operatorname{Card}(F \cap G)$$

Propositions

E ensemble fini

(i) Pour tout $F \subseteq E$:

$$\mathrm{Card}\,\overline{F} = \mathrm{Card}\,E - \mathrm{Card}\,F$$

(ii) Pour tous $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$:

$$\mathrm{Card}(F \cup G) = \mathrm{Card}\,F + \mathrm{Card}\,G - \mathrm{Card}(F \cap G)$$

Corollaire

F et G parties finies disjointes de E

$$\mathrm{Card}(F \cup G) =$$

Propositions

E ensemble fini

(i) Pour tout $F \subseteq E$:

$$\mathrm{Card}\,\overline{F} = \mathrm{Card}\,E - \mathrm{Card}\,F$$

(ii) Pour tous $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$:

$$\mathrm{Card}(F \cup G) = \mathrm{Card}\,F + \mathrm{Card}\,G - \mathrm{Card}(F \cap G)$$

Corollaire

F et G parties finies disjointes de E

$$\mathrm{Card}(F \cup G) = \mathrm{Card}\,F + \mathrm{Card}\,G$$

Proposition

E, F ensembles finis

$$\mathrm{Card}(E \times F) =$$

Proposition

E, F ensembles finis

$$\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F$$

Proposition

E, F ensembles finis

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}\, E \times \mathrm{Card}\, F$$

Démonstration.

$$E \times F = \{x_1, \ldots, x_n\} \times \{y_1, \ldots, y_p\}$$

$$=$$

Proposition

E, F ensembles finis

$$\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} E \times F &= \{x_1, \ldots, x_n\} \times \{y_1, \ldots, y_p\} \\ &= \{(x_i, y_j) \mid 1 \leqslant i \leqslant n \quad 1 \leqslant j \leqslant p\} \end{aligned}$$

□

Corollaire

E ensemble fini $\qquad k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Card}(E^k) =$$

Corollaire

E ensemble fini $\qquad k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Card}(E^k) =$$

Démonstration.

$$E^k = \{x_1, \ldots, x_n\}^k$$

$$=$$

Corollaire

E ensemble fini $\qquad k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Card}(E^k) =$$

Démonstration.

$$E^k = \{x_1, \ldots, x_n\}^k$$

$$= \{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \mid \forall j = 1 \ldots k \quad 1 \leqslant i_j \leqslant n\}$$

$\square$

Corollaire

E ensemble fini $\qquad k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Card}(E^k) = (\mathrm{Card}\, E)^k$$

Démonstration.

$$E^k = \{x_1, \ldots, x_n\}^k$$
$$= \{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \mid \forall j = 1 \ldots k \quad 1 \leqslant i_j \leqslant n\}$$

$\square$

Notation (rappel)

$\mathscr{F}(E, F)$: ensemble des applications de E dans F

Proposition

E, F ensembles finis

$$\operatorname{Card} \mathscr{F}(E, F) =$$

Notation (rappel)

$\mathscr{F}(E, F)$: ensemble des applications de E dans F

Proposition

E, F ensembles finis

$$\operatorname{Card} \mathscr{F}(E, F) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$$

Proposition

E, F ensembles finis

$$\operatorname{Card} \mathscr{F}(E, F) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$$

Démonstration. $E = \{x_1, \dots, x_n\}$

$$\varphi \in \mathscr{F}(E, F) : \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ x_1 & \longmapsto & \varphi(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & \longmapsto & \varphi(x_n) \end{array}$$

Proposition

E, F ensembles finis

$$\operatorname{Card} \mathscr{F}(E,F) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$$

Démonstration. $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$$\varphi \in \mathscr{F}(E,F) : \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ x_1 & \longmapsto & \varphi(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & \longmapsto & \varphi(x_n) \end{array}$$

$$(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \in F^n$$

Proposition

E, F ensembles finis

$$\operatorname{Card} \mathscr{F}(E, F) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$$

Démonstration. $E = \{x_1, \dots, x_n\}$

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(E, F) &\xrightarrow{\sim} F^n \\ \varphi &\longmapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^n &\xrightarrow{\sim} \mathscr{F}(E, F) \\ (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto (\varphi : x_i \mapsto u_i) \end{aligned}$$

$\square$

Proposition

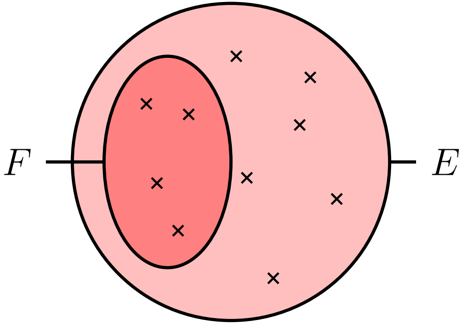
E ensemble fini à n éléments

$$\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) =$$

Proposition

E ensemble fini à n éléments

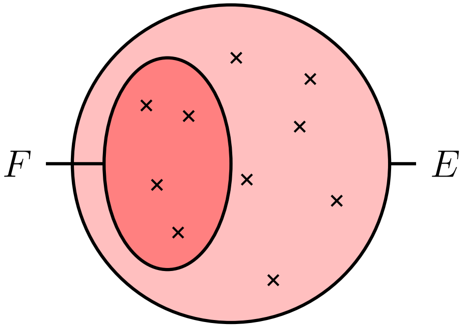
$$\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) =$$



Proposition

E ensemble fini à n éléments

$$\operatorname{Card}\mathscr{P}(E) = 2^{\operatorname{Card}E} = 2^n$$



Proposition

E ensemble fini à n éléments

$$\operatorname{Card}\mathscr{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E} = 2^n$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \chi : \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \mathscr{F}(E,\{0,1\}) \\ F &\longmapsto \chi_F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi : \mathscr{F}(E,\{0,1\}) &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ \varphi &\longmapsto \varphi^{-1}(\{1\}) \end{aligned}$$

$\square$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\mathscr{P}(E) \xrightarrow{\chi} \mathscr{F}(E, \{0,1\})$$
$$\varnothing \longmapsto \chi_\varnothing : \quad \begin{cases} a \longmapsto 0 \\ b \longmapsto 0 \\ c \longmapsto 0 \end{cases}$$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\mathscr{P}(E) \xrightarrow{\chi} \mathscr{F}(E, \{0,1\})$$

$$\{a\} \longmapsto \chi_{\{a\}} : \begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 0 \\ c \longmapsto 0 \end{cases}$$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(E) &\xrightarrow{\chi} \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\ \{b\} &\longmapsto \chi_{\{b\}} : \begin{cases} a \longmapsto 0 \\ b \longmapsto 1 \\ c \longmapsto 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(E) &\xrightarrow{\chi} \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\ \{c\} &\longmapsto \chi_{\{c\}} : \begin{cases} a \longmapsto 0 \\ b \longmapsto 0 \\ c \longmapsto 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \xrightarrow{\chi} & \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\ \{a, b\} & \longmapsto & \chi_{\{a,b\}} : \begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 1 \\ c \longmapsto 0 \end{cases} \end{array}$$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}(E) &\xrightarrow{\chi} \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\
\{a, c\} &\longmapsto \chi_{\{a,c\}} : \begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 0 \\ c \longmapsto 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \xrightarrow{\chi} & \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\ \{b, c\} & \longmapsto & \chi_{\{b,c\}} : \begin{cases} a \longmapsto 0 \\ b \longmapsto 1 \\ c \longmapsto 1 \end{cases} \end{array}$$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \xrightarrow{\chi} & \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\ \{a, b, c\} & \longmapsto & \chi_E : \quad \begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 1 \\ c \longmapsto 1 \end{cases} \end{array}$$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\mathscr{F}(E, \{0,1\}) \xrightarrow{\Psi} \mathscr{P}(E)$$

$$\varphi : \begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 0 \\ c \longmapsto 1 \end{cases} \longmapsto \varphi^{-1}(\{1\}) = \{a, c\}$$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{F}(E,\{0,1\}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathscr{P}(E) & \xrightarrow{\chi} & \mathscr{F}(E,\{0,1\}) \\
\varphi : \begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 0 \\ c \longmapsto 1 \end{cases} & \longmapsto & \varphi^{-1}(\{1\}) = \{a, c\} & \longmapsto & \chi_{\{a,c\}} : \begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 0 \\ c \longmapsto 1 \end{cases}
\end{array}$$

$$\chi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(E,\{0,1\})}$$

Exemple : $E = \{a, b, c\}$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{P}(E) & \xrightarrow{\chi} & \mathscr{F}(E, \{0,1\}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathscr{P}(E) \\
\{a, c\} & \longmapsto & \chi_{\{a,c\}} : \begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 0 \\ c \longmapsto 1 \end{cases} & \longmapsto & \chi_{\{a,c\}}^{-1}(\{1\}) = \{a, c\}
\end{array}$$

$$\Psi \circ \chi = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(E)}$$

Proposition

E ensemble fini à n éléments

$$\operatorname{Card}\mathscr{P}(E) = 2^{\operatorname{Card}E} = 2^n$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\chi : \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \mathscr{F}(E,\{0,1\})\\ F &\longmapsto \chi_F\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi : \mathscr{F}(E,\{0,1\}) &\longrightarrow \mathscr{P}(E)\\ \varphi &\longmapsto \varphi^{-1}(\{1\})\end{aligned}$$

$\square$

k, n : entiers naturels

E : ensemble de cardinal n

Définition

Une k-liste est k-uplet :

$$(x_1, \ldots, x_k)$$

Remarque

Ensemble des k-listes d'éléments de E : E^k

Proposition

Nombre de k-listes d'éléments de E : n^k

Proposition

$0 \leqslant k \leqslant n$

Nombre de k-listes d'éléments distincts de E :

Proposition

$0 \leqslant k \leqslant n$

Nombre de k-listes d'éléments distincts de E :

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

Proposition

$0 \leqslant k \leqslant n$

Nombre de k-listes d'éléments distincts de E :

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$$

Proposition

Nombre de k-listes d'éléments distincts de E :

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$$

Démonstration. $(x_1, \ldots, x_k)$: k éléments distincts

- n possibilités pour x_1
- $n-1$ possibilités pour x_2 (car $x_2 \neq x_1$)
- $n-2$ possibilités pour x_3 (car $x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2$)
- etc...
- $n-k+1$ possibilités pour x_k. $\square$

Exemple 1

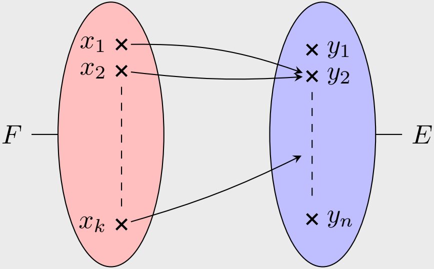
$\mathrm{Card}\, E = n \qquad \mathrm{Card}\, F = k$

Nombre d'applications de F dans E : $\quad n^k$

Nombre d'applications injectives de F dans E :

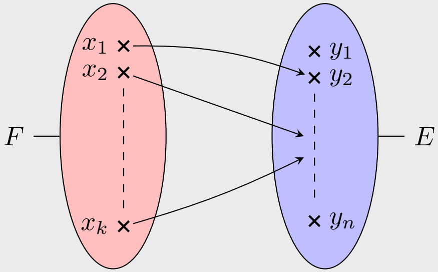
$$\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 1 (suite)



Nombre d'applications de F dans E : n^k

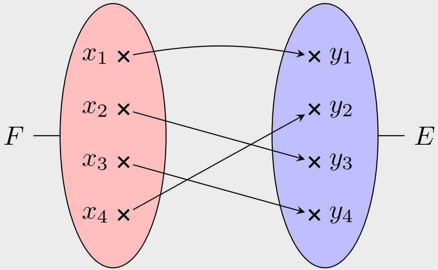
Exemple 1 (suite)



Nombre d'applications injectives de F dans E :

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 1 (suite)



Nombre d'applications bijectives de F dans E :

$n!$ si $k = n$

0 sinon

Définition

Permutation de E : n-liste d'éléments distincts de E

Définition

Permutation de E : n-liste d'éléments distincts de E

Proposition

Nombre de permutations de E : $\quad n!$

C'est le nombre de façons d'ordonner E.

Définition

Permutation de E : n-liste d'éléments distincts de E

Proposition

Nombre de permutations de E : $n!$

C'est le nombre de façons d'ordonner E.

▷ Exercice 1.

Écrire toutes les permutations de $\{a, b\}$, puis de $\{a, b, c\}$, puis de $\{a, b, c, d\}$.

II. Listes

A. Propriétés

B. Applications aux probabilités

Rappel

(Ω, P) espace probabilisé **fini**

P : probabilité uniforme

$$\forall \omega \in \Omega \qquad P(\{\omega\}) = \frac{1}{\operatorname{Card} \Omega}$$

Rappel

(Ω, P) espace probabilisé **fini**

P : probabilité uniforme

$$\forall \omega \in \Omega \qquad P(\{\omega\}) = \frac{1}{\operatorname{Card}\Omega}$$

Alors :

$$\forall A \subseteq \Omega \qquad P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega}$$

Exemple 2

Pour une course de 21 chevaux, combien de tiercés sont possibles ?

Exemple 2

Pour une course de 21 chevaux, combien de tiercés sont possibles ?

$$21 \times 20 \times 19$$

Exemple 2

Pour une course de 21 chevaux, combien de tiercés sont possibles ?

$$21 \times 20 \times 19$$

Combien contiennent le cheval numéro 13 ?

Exemple 2

Pour une course de 21 chevaux, combien de tiercés sont possibles ?

$$21 \times 20 \times 19$$

Combien contiennent le cheval numéro 13 ?

$$3 \times 20 \times 19$$

Exemple 2

Pour une course de 21 chevaux, combien de tiercés sont possibles ?

$$21 \times 20 \times 19$$

Combien contiennent le cheval numéro 13 ?

$$3 \times 20 \times 19$$

Que peut-on en déduire ?

Exemple 2

Pour une course de 21 chevaux, combien de tiercés sont possibles ?

$$\operatorname{Card}\Omega = 21 \times 20 \times 19$$

Combien contiennent le cheval numéro 13 ?

$$\operatorname{Card}A = 3 \times 20 \times 19$$

Que peut-on en déduire ?

Exemple 2 (suite)

- Soit Ω l'ensemble des tiercés possible.
- Soit A l'événement :
  «le cheval n° 13 arrive dans le tiercé de tête.»
- Les éléments de Ω sont équiprobables donc par propriété :

$$P(A) = \frac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\, \Omega} = \frac{1}{7}$$

Exemple 3

On jette simultanément deux dés.

X : somme des deux dés.

Calculer $P(X = k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4, 7$.

Exemple 3

On jette simultanément deux dés.

X : somme des deux dés.

Calculer $P(X = k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4, 7$.

On choisit pour Ω :

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(a, b) \mid 1 \leqslant a \leqslant 6 \quad 1 \leqslant b \leqslant 6\} \\ &= \{1, \ldots, 6\}^2\end{aligned}$$

Les éléments de Ω sont équiprobables.

Exemple 3 (suite)

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Exemple 3 (suite)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Exemple 3 (suite)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On obtient :

k	1	2	3	4	7
$P(X=k)$					

Exemple 3 (suite)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On obtient :

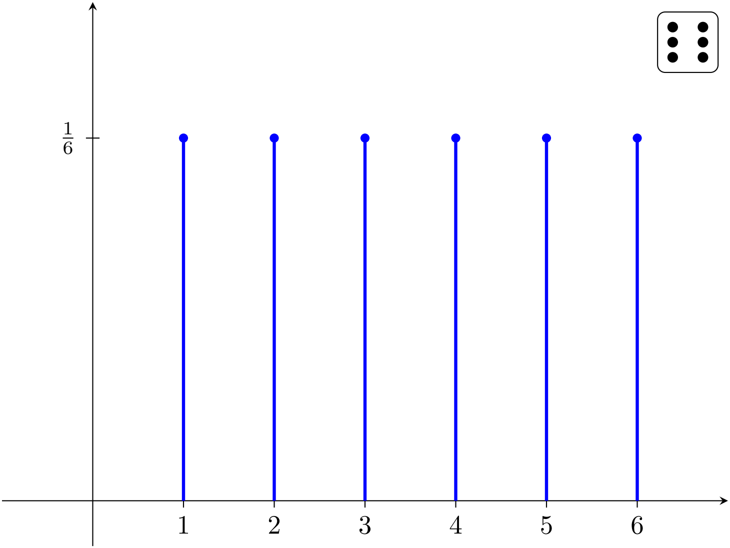
k	1	2	3	4	7
$P(X=k)$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

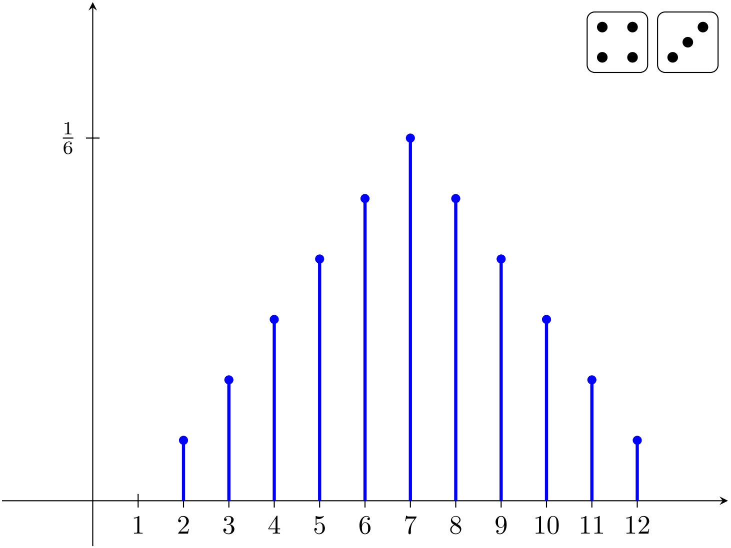
Exemple 3 (suite)

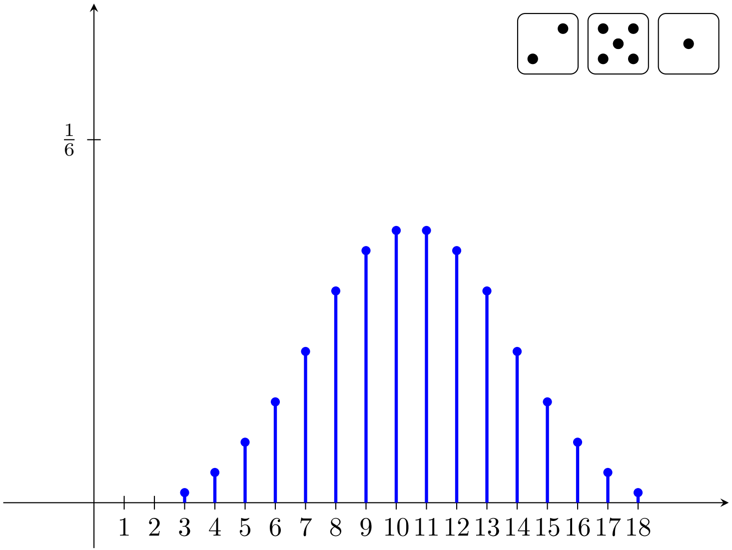
$$\begin{aligned}
(X=2) &= \{(1,1)\} \\
(X=3) &= \{(1,2),(2,1)\} \\
(X=4) &= \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \\
&\vdots \\
(X=12) &= \{(6,6)\}
\end{aligned}$$

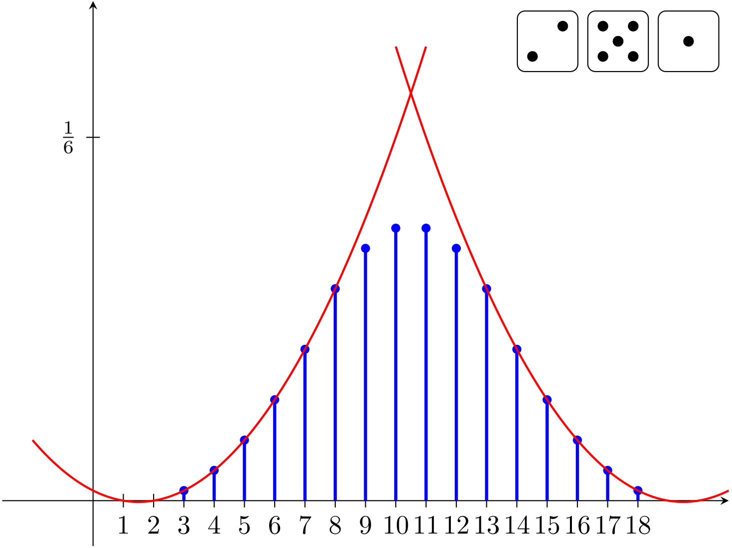
Formule générale :

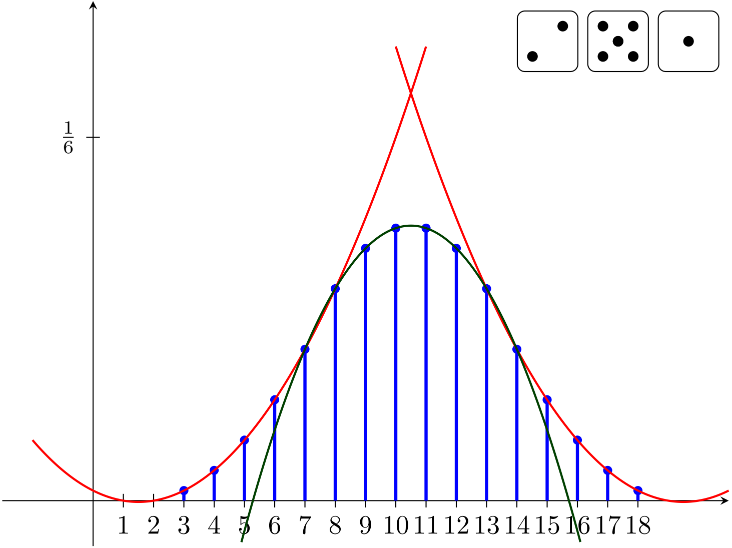
$$P(X=n) = \begin{cases} \frac{n-1}{36} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant 7 \\ \frac{13-n}{36} & \text{si } 7 \leqslant n \leqslant 13 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$


$\frac{1}{6}$
1
2
3
4
5
6


$\frac{1}{6}$
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


1/6
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18


$\frac{1}{6}$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18


$\frac{1}{6}$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

▷ Exercice 2.

On jette trois dés.

Soit X la somme des trois dés.

Calculer $P(X = k)$ pour $k = 2, 3, 4, 5, 6, 10$.

Exemple 4

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots (ayant un sens ou non) existe-t-il

a. de 4 lettres ?
b. de 4 lettres distinctes ?
c. de 4 lettres dont un et un seul S ?
d. de 4 lettres distinctes dont le S ?

e. de 4 lettres dont le S en troisième position ?
f. de 4 lettres distinctes dont le S en troisième position ?

Exemple 4

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots (ayant un sens ou non) existe-t-il

a. de 4 lettres ? 26^4

b. de 4 lettres distinctes ?

c. de 4 lettres dont un et un seul S ?

d. de 4 lettres distinctes dont le S ?

e. de 4 lettres dont le S en troisième position ?

f. de 4 lettres distinctes dont le S en troisième position ?

Exemple 4

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots (ayant un sens ou non) existe-t-il

a. de 4 lettres ? 26^4

b. de 4 lettres distinctes ? $26 \times 25 \times 24 \times 23$

c. de 4 lettres dont un et un seul S ?

d. de 4 lettres distinctes dont le S ?

e. de 4 lettres dont le S en troisième position ?

f. de 4 lettres distinctes dont le S en troisième position ?

Exemple 4

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots (ayant un sens ou non) existe-t-il

a. de 4 lettres ? 26^4

b. de 4 lettres distinctes ? $26 \times 25 \times 24 \times 23$

c. de 4 lettres dont un et un seul S ? 4×25^3

d. de 4 lettres distinctes dont le S ?

e. de 4 lettres dont le S en troisième position ?

f. de 4 lettres distinctes dont le S en troisième position ?

Exemple 4

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots (ayant un sens ou non) existe-t-il

a. de 4 lettres ? 26^4

b. de 4 lettres distinctes ? $26 \times 25 \times 24 \times 23$

c. de 4 lettres dont un et un seul S ? 4×25^3

d. de 4 lettres distinctes dont le S ?

$$4 \times 25 \times 24 \times 23$$

e. de 4 lettres dont le S en troisième position ?

f. de 4 lettres distinctes dont le S en troisième position ?

Exemple 4

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots (ayant un sens ou non) existe-t-il

a. de 4 lettres ? 26^4

b. de 4 lettres distinctes ? $26 \times 25 \times 24 \times 23$

c. de 4 lettres dont un et un seul S ? 4×25^3

d. de 4 lettres distinctes dont le S ?

$$4 \times 25 \times 24 \times 23$$

e. de 4 lettres dont le S en troisième position ? 26^3

f. de 4 lettres distinctes dont le S en troisième position ?

Exemple 4

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots (ayant un sens ou non) existe-t-il

a. de 4 lettres ? 26^4

b. de 4 lettres distinctes ? $26 \times 25 \times 24 \times 23$

c. de 4 lettres dont un et un seul S ? 4×25^3

d. de 4 lettres distinctes dont le S ?

$$4 \times 25 \times 24 \times 23$$

e. de 4 lettres dont le S en troisième position ? 26^3

f. de 4 lettres distinctes dont le S en troisième position ? $25 \times 24 \times 23$

Exemple 4 (suite)

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots (ayant un sens ou non) existe-t-il

g. de 4 lettres dont au moins un S ?

Exemple 4 (suite)

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots (ayant un sens ou non) existe-t-il

g. de 4 lettres dont au moins un S ?

$$26^4 - 25^4$$

Exemple 4 (suite)

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots (ayant un sens ou non) existe-t-il

g. de 4 lettres dont au moins un S ?

$$26^4 - 25^4 \ = \ 4 \times 25^3 + 6 \times 25^2 + 4 \times 25 + 1$$

Remarque

Sac contenant 26 jetons de A à Z.

On pioche 4 lettres une par une.

(i) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S ?

(ii) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S en troisième position ?

(iii) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot MPSI ?

Remarque

Sac contenant 26 jetons de A à Z.

On pioche 4 lettres une par une.

(i) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S ?

$$P(A) = \frac{4\times 25\times 24\times 23}{26\times 25\times 24\times 23} = \frac{4}{26} \simeq 0{,}154$$

(ii) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S en troisième position ?

(iii) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot MPSI ?

Remarque

Sac contenant 26 jetons de A à Z.

On pioche 4 lettres une par une.

(i) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S ?

$$P(A) = \frac{4\times 25\times 24\times 23}{26\times 25\times 24\times 23} = \frac{4}{26} \simeq 0{,}154$$

(ii) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S en troisième position ?

$$P(B) = \frac{25\times 24\times 23}{26\times 25\times 24\times 23} = \frac{1}{26} \simeq 0{,}038$$

(iii) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot MPSI ?

Remarque

Sac contenant 26 jetons de A à Z.

On pioche 4 lettres une par une.

(i) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S ?

$$P(A) = \frac{4\times25\times24\times23}{26\times25\times24\times23} = \frac{4}{26} \simeq 0{,}154$$

(ii) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S en troisième position ?

$$P(B) = \frac{25\times24\times23}{26\times25\times24\times23} = \frac{1}{26} \simeq 0{,}038$$

(iii) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot MPSI ?

$$P(C) = \frac{1}{26\times25\times24\times23} \simeq 2{,}79 \times 10^{-6}$$

Remarque

Sac contenant 26 jetons de A à Z.

On pioche 4 lettres avec remise.

(iv) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S ?

(v) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S en troisième position ?

(vi) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot MPSI ?

Remarque

Sac contenant 26 jetons de A à Z.

On pioche 4 lettres avec remise.

(iv) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S ?

$$P(A) = \frac{26^4 - 25^4}{26^4} \simeq 0{,}145$$

(v) Quelle est la probabilité que ce mot contienne le S en troisième position ?

$$P(B) = \frac{26^3}{26^4} = \frac{1}{26} \simeq 0{,}038$$

(vi) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot MPSI ?

$$P(C) = \frac{1}{26^4} \simeq 2{,}19 \times 10^{-6}$$

▷ Exercice 3.

Soit $k \in \{0, \dots, 26\}$. On pioche k lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

a. Décrire l'univers modélisant cette expérience. Quel est son cardinal ?

S_k : «le S apparaît lors de l'un des k tirages»
T_k : «le S apparaît lors du k-ème tirage»

b. Calculer la probabilité de S_k.

c. Exprimer T_k en fonction de S_k et S_{k-1} et en déduire sa probabilité.

▷ Exercice 3.

Soit $k \in \{0, \ldots, 26\}$. On pioche k lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

Variante :

d. Calculer directement la probabilité de T_k.

e. Exprimer S_k en fonction des T_i et en déduire sa probabilité.

III. Combinaisons

A. Coefficients du binôme

B. Applications aux probabilités

Proposition

Nombre de parties à k éléments de E (k-combinaisons) :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

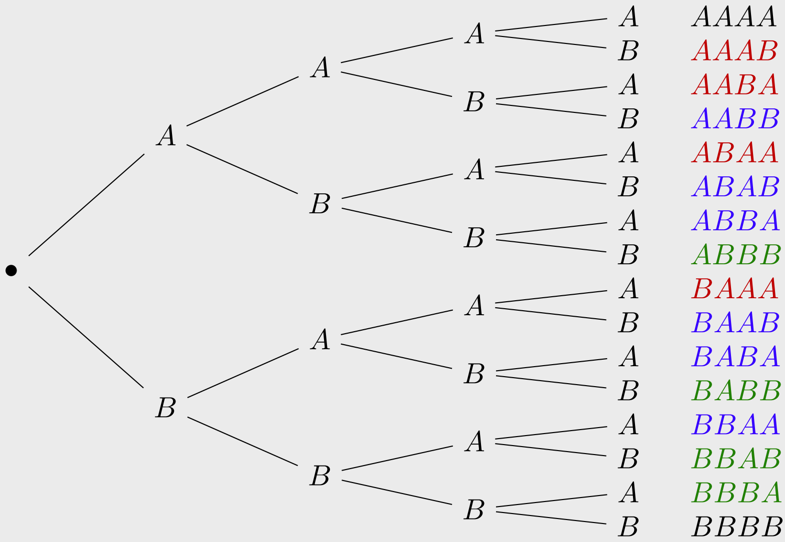
Proposition

Nombre de parties à k éléments de E (k-combinaisons) :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

C'est également le nombre de façons de choisir k éléments parmi n.

Remarque


AAAA
AAAB
AABA
AABB
ABAA
ABAB
ABBA
ABBB
BAAA
BAAB
BABA
BABB
BBAA
BBAB
BBBA
BBBB

Notation

Ensemble des parties à k éléments de E :

$$\mathscr{P}_k(E)$$

Notation

Ensemble des parties à k éléments de E :

$$\mathscr{P}_k(E)$$

Proposition

$$\operatorname{Card} \mathscr{P}_k(E) = \binom{n}{k}$$

Proposition

$$\operatorname{Card} \mathscr{P}_k(E) = \binom{n}{k}$$

Démonstration. Toute partie de E à k éléments donne $k!$ listes de k éléments distincts de E.

$$\mathscr{L}_k(E) = \bigcup_{F \in \mathscr{P}_k(E)} \mathscr{L}_k(F)$$

Cette union est disjointe donc :

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \operatorname{Card} \mathscr{P}_k(E) \times k! \qquad \square$$

$$\{a, b, c\} \qquad \{a, b, d\} \qquad \{a, c, d\} \qquad \{b, c, d\}$$

$$
\begin{array}{cccc}
(a,b,c) & (a,b,d) & (a,c,d) & (b,c,d) \\
(a,c,b) & (a,d,b) & (a,d,c) & (b,d,c) \\
(b,a,c) & (b,a,d) & (c,a,d) & (c,b,d) \\
(b,c,a) & (b,d,a) & (c,d,a) & (c,d,b) \\
(c,a,b) & (d,a,b) & (d,a,c) & (d,b,c) \\
(c,b,a) & (d,b,a) & (d,c,a) & (d,c,b) \\
\{a,b,c\} & \{a,b,d\} & \{a,c,d\} & \{b,c,d\}
\end{array}
$$

$$
k! = 3! \left\{ \begin{array}{cccc}
(a, b, c) & (a, b, d) & (a, c, d) & (b, c, d) \\
(a, c, b) & (a, d, b) & (a, d, c) & (b, d, c) \\
(b, a, c) & (b, a, d) & (c, a, d) & (c, b, d) \\
(b, c, a) & (b, d, a) & (c, d, a) & (c, d, b) \\
(c, a, b) & (d, a, b) & (d, a, c) & (d, b, c) \\
(c, b, a) & (d, b, a) & (d, c, a) & (d, c, b)
\end{array} \right.
$$

$$
\{a, b, c\} \qquad \{a, b, d\} \qquad \{a, c, d\} \qquad \{b, c, d\}
$$

$$k! = 3! \left\{ \boxed{\begin{array}{cccc} (a,b,c) & (a,b,d) & (a,c,d) & (b,c,d) \\ (a,c,b) & (a,d,b) & (a,d,c) & (b,d,c) \\ (b,a,c) & (b,a,d) & (c,a,d) & (c,b,d) \\ (b,c,a) & (b,d,a) & (c,d,a) & (c,d,b) \\ (c,a,b) & (d,a,b) & (d,a,c) & (d,b,c) \\ (c,b,a) & (d,b,a) & (d,c,a) & (d,c,b) \end{array}} \right. \quad \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-3)!}$$

$$\begin{array}{cccc} \{a,b,c\} & \{a,b,d\} & \{a,c,d\} & \{b,c,d\} \end{array}$$

$$
k! = 3! \left\{ \boxed{\begin{array}{cccc}
(a, b, c) & (a, b, d) & (a, c, d) & (b, c, d) \\
(a, c, b) & (a, d, b) & (a, d, c) & (b, d, c) \\
(b, a, c) & (b, a, d) & (c, a, d) & (c, b, d) \\
(b, c, a) & (b, d, a) & (c, d, a) & (c, d, b) \\
(c, a, b) & (d, a, b) & (d, a, c) & (d, b, c) \\
(c, b, a) & (d, b, a) & (d, c, a) & (d, c, b)
\end{array}} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{n!}{(n-k)!} \\ = \frac{4!}{(4-3)!} \end{array}
$$

$$
\underbrace{\{a, b, c\} \qquad \{a, b, d\} \qquad \{a, c, d\} \qquad \{b, c, d\}}_{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{4!}{3!1!}}
$$

Proposition (Formule du binôme)

$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$

Proposition (Formule du binôme)

$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a+b)\cdot\cdots\cdot(a+b)\\ &= a^n+\cdots+\ ?\ a^k b^{n-k}+\cdots+b^n\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a+b)\cdot\dots\cdot(a+b)\\ &= a^n+\dots+\binom{n}{k}a^kb^{n-k}+\dots+b^n\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a+b)\cdot\dots\cdot(a+b)\\ &= a^n+\dots+\binom{n}{k}a^k b^{n-k}+\dots+b^n\end{aligned}$$

$\square$

Propositions

(i) $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

(iii) $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 < k < n$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration.

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

L'application $\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ F & \longmapsto & \overline{F} \end{array}$ est bijective.

Donc $\mathscr{P}_k(E)$ a autant d'éléments que son image :

$$\operatorname{Card} \mathscr{P}_k(E) = \operatorname{Card} \mathscr{P}_{n-k}(E)$$

Suite de la démonstration.

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

$$\mathscr{P}(E)=\bigcup_{k=0}^{n}\mathscr{P}_k(E)$$

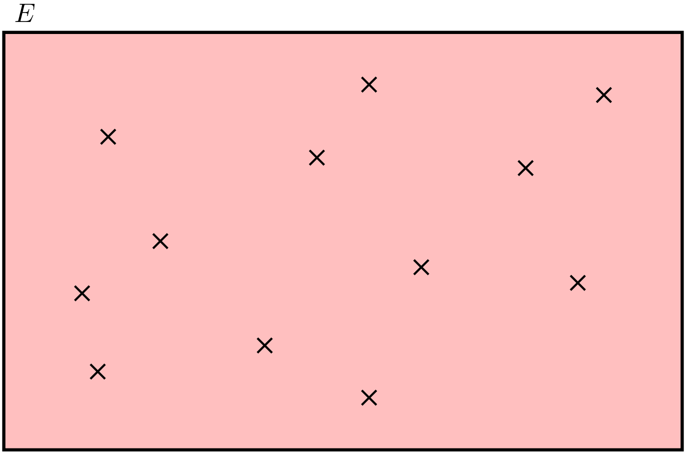
Cette union est disjointe donc :

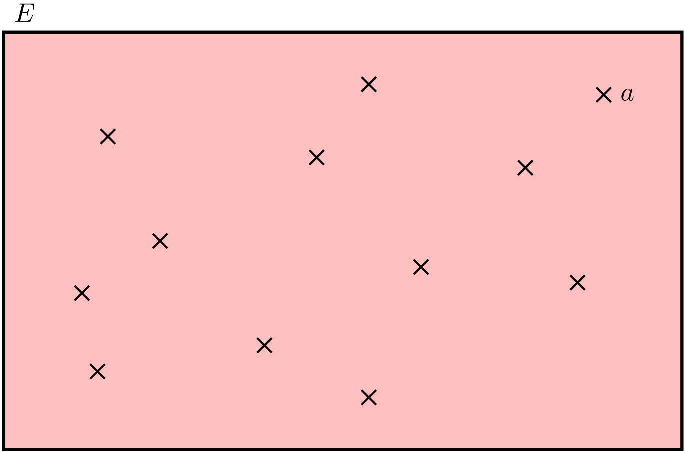
$$\operatorname{Card}\mathscr{P}(E)=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Card}\mathscr{P}_k(E)$$

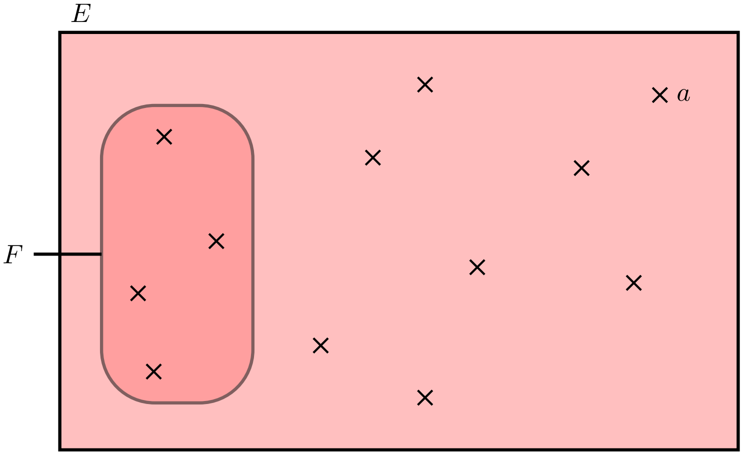
$$\iff \qquad 2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Suite de la démonstration.

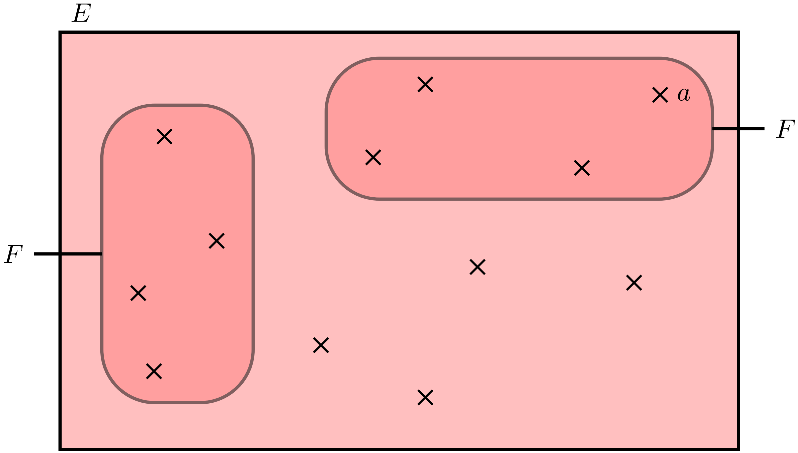
(iii) $$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$


E

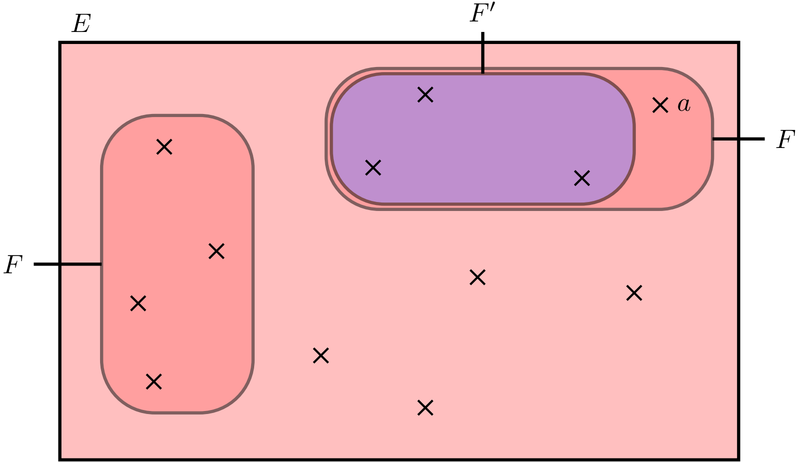

E
a



E
F
a



E
a
F
F


E
F'
a
F
F

Suite de la démonstration.

(iii) $$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Suite de la démonstration.

(iii) $$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

$\square$

III. Combinaisons

Exemple 5

Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 6 boules rouges.
On en pioche 4.

Nombre de résultats possibles :

Exemple 5

Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 6 boules rouges.

On en pioche 4.

Nombre de résultats possibles : $\binom{14}{4}$

En effet :

$$\Omega = \mathscr{P}_4(U)$$

avec

$$U = \{B_1, \dots, B_5, N_1, \dots, N_3, R_1, \dots, R_6\}$$

Exemple 5 (suite)

Quelle est la probabilité d'obtenir :

(i) 4 boules rouges ?

(ii) 2 rouges, une noire et une blanche ?

(iii) Au moins une boule noire ?

(iv) Au moins une noire et une blanche ?

Proposition - Schéma hypergéométrique

$\mathscr{U}$ ensemble à N objets, dont a ont la propriété A.

On pioche simultanément n objets.

Probabilité d'obtenir k objets de type A :

$$p =$$

Proposition - Schéma hypergéométrique

$\mathscr{U}$ ensemble à N objets, dont a ont la propriété A.

On pioche simultanément n objets.

Probabilité d'obtenir k objets de type A :

$$p = \frac{\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Proposition - Schéma hypergéométrique

$\mathscr{U}$ ensemble à N objets, dont a ont la propriété A.

On pioche simultanément n objets.

Probabilité d'obtenir k objets de type A :

$$p = \frac{\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Remarque

Cette probabilité est non-nulle ssi :

$$\mathrm{Max}\,\{0, n+a-N\} \leqslant k \leqslant \mathrm{Min}\,\{a,n\}$$

▷ Exercice 4.

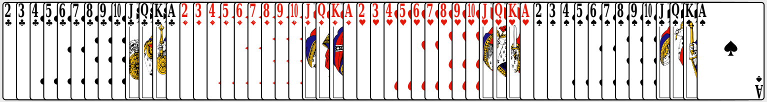
Une urne contient une boule noire, deux boules rouges et sept boules blanches.

a. On pioche simultanément n boules de l'urne ($0 \leqslant n \leqslant 10$).
Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?

b. On pioche n fois de suite une boule de l'urne ($n \in \mathbb{N}$) puis on la remet dans l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?

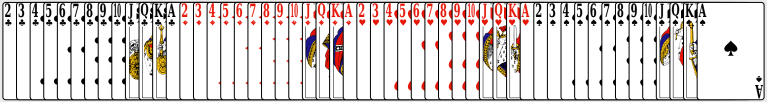
Exemple 6 : Poker

Le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes :

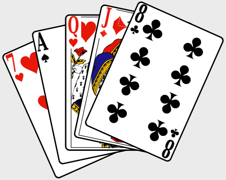


Exemple 6 : Poker

Le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes :



Chaque joueur reçoit une main de cinq cartes :



Exemple 6 : Poker

Chaque joueur reçoit une main de cinq cartes :

Le nombre de mains possibles est :

Exemple 6 : Poker

Chaque joueur reçoit une main de cinq cartes :

Le nombre de mains possibles est :

$$\binom{52}{5}$$

Exemple 6 : Poker

Chaque joueur reçoit une main de cinq cartes :

Le nombre de mains possibles est :

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{47!\,5!}$$

Exemple 6 : Poker

Chaque joueur reçoit une main de cinq cartes :

Le nombre de mains possibles est :

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{47!\,5!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

Exemple 6 : Poker

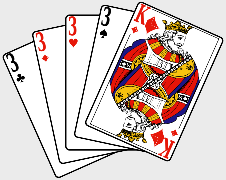
Chaque joueur reçoit une main de cinq cartes :

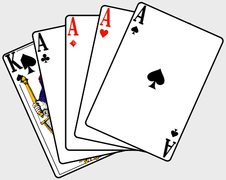
Le nombre de mains possibles est :

$$\binom{52}{5} = 52 \times 51 \times 49 \times 20 = 2\,598\,960$$

Exemple 6 : Poker

Carré :





Nombre de mains contenant un carré :

Exemple 6 : Poker

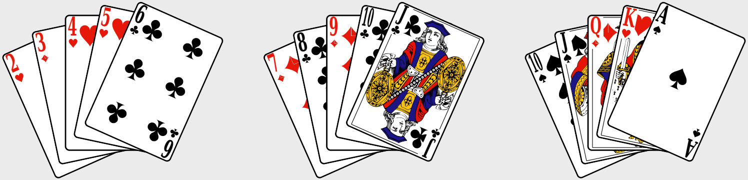
Carré :

Nombre de mains contenant un carré :

$$13 \times 48$$

Exemple 6 : Poker

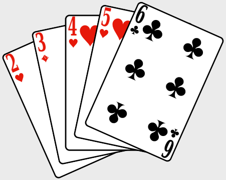
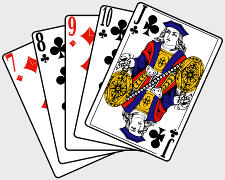
Suite :



Nombre de mains contenant une suite :

Exemple 6 : Poker

Suite :

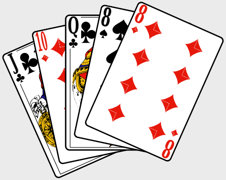

Nombre de mains contenant une suite :

$$9 \times (4^5 - 4)$$

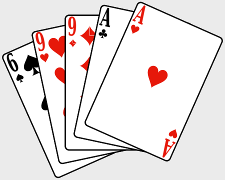
(si on ne compte pas les suites royales).

Exemple 6 : Poker

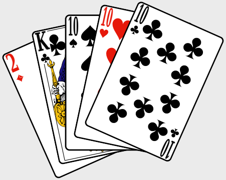
Paire



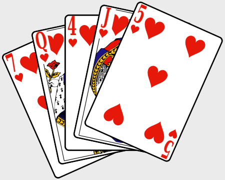
Deux paires



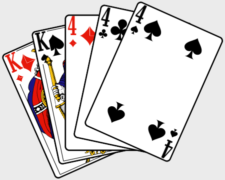
Brelan



Couleur



Full



▷ Exercice 5.

Combien de mains contiennent un brelan, mais pas de full ?

Combien contiennent deux paires ?

Exemple 6 : Poker

Total	2 598 960	1
Paire	1 098 240	0,42257
Deux paires	123 552	0,04754
Brelan	54 912	0,02113
Suite	9 180	0,00353
Couleur	5 148	0,00198
Full	3 744	0,00144
Carré	624	0,00024
Suite royale	36	0,000014

▷ Exercice 6.

On jette cinq dés.

Soit X le nombre de 6 obtenus.

a. Déterminer la loi de X.

b. Vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité de X.

Résumé

E : ensemble à n éléments

Nombre de k-listes	n^k
Nombre de k-listes d'éléments distincts	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
Nombre de parties à k éléments	$\dbinom{n}{k}$

Prochain chapitre

Chapitre C3

Variables aléatoires