Mathématiques

Chapitre C1
Probabilités

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

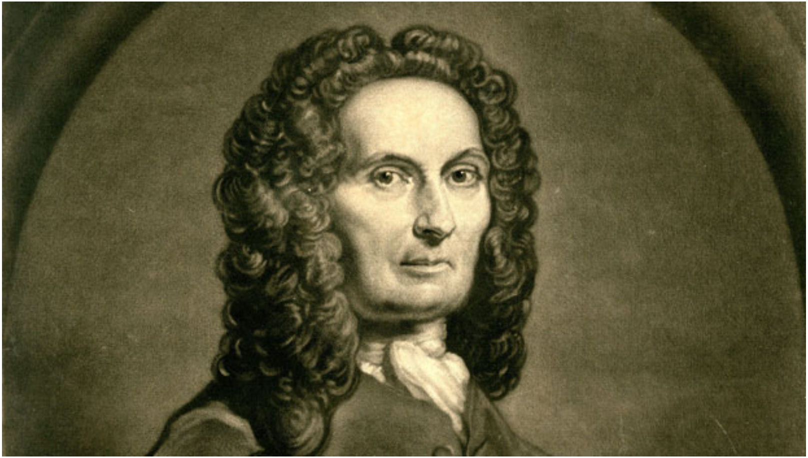
Blaise Pascal (France) 1623 – 1662

Pierre de Fermat (France) 1601 – 1665

Christian Huygens (Hollande) 1629 – 1695

Jacob Bernoulli (Suisse) 1654 – 1695

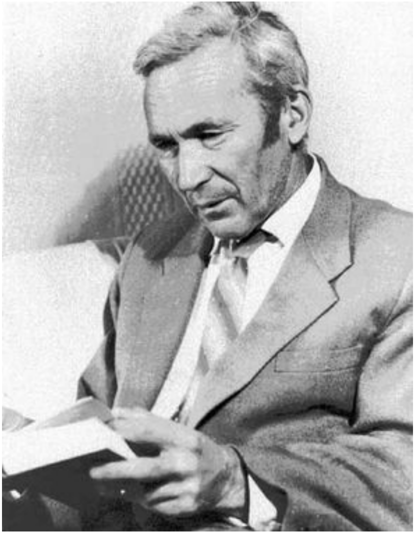
Abraham de Moivre (France) 1667 – 1754



Pierre-Simon de Laplace
(France) 1749 – 1827

Carl Friedrich Gauss
(Allemagne) 1777 – 1855

Andreï Kolmogorov (Russie) 1903 – 1987



I. Généralités

Définition

On réalise une **épreuve** ou **expérience aléatoire**. L'ensemble des possibilités de résultats de cette épreuve est appelé univers, il est noté Ω.

Définition

On réalise une **épreuve** ou **expérience aléatoire**. L'ensemble des possibilités de résultats de cette épreuve est appelé univers, il est noté Ω.

Remarque

Ω est un ensemble.

Exemple 1

(i) On jette une pièce.

$$\Omega =$$

Exemple 1

(i) On jette une pièce.

$$\Omega = \{P, F\}$$

Exemple 1

(i) On jette une pièce.

$$\Omega = \{P, F\}$$

(ii) On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.

$$\Omega =$$

Exemple 1

(i) On jette une pièce.

$$\Omega = \{P, F\}$$

(ii) On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Exemple 1

(i) On jette une pièce.

$$\Omega = \{P, F\}$$

(ii) On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(iii) On jette trois dés simultanément.

$$\Omega =$$

Exemple 1

(i) On jette une pièce.

$$\Omega = \{P, F\}$$

(ii) On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(iii) On jette trois dés simultanément.

$$\Omega = D^3 \text{ où } D = \{1, \ldots, 6\}$$

Exemple 1

(i) On jette une pièce.

$$\Omega = \{P, F\}$$

(ii) On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(iii) On jette trois dés simultanément.

$$\Omega = D^3 \text{ où } D = \{1, \dots, 6\}$$

(iv) Tiercé avec 21 chevaux.

Ω :

Exemple 1

(i) On jette une pièce.

$$\Omega = \{P, F\}$$

(ii) On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(iii) On jette trois dés simultanément.

$$\Omega = D^3 \text{ où } D = \{1, \dots, 6\}$$

(iv) Tiercé avec 21 chevaux.

$$\Omega : \ \{\text{triplets } (a, b, c) \text{ d'entiers distincts compris entre 1 et 21}\}$$

Remarque

En première année les univers sont finis.

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

Définitions

Un événement est un sous-ensemble de Ω.

Définitions

Un événement est un sous-ensemble de Ω.

Exemple 2

On lance trois dés. On définit les événements

- A : les trois dés donnent le même numéro

$A =$

- B : on obtient 421

$B =$

- C : la somme des dés est égale à 5.

$C =$

Définitions

Un événement est un sous-ensemble de Ω.

Exemple 2

On lance trois dés. On définit les événements

- A : les trois dés donnent le même numéro

$A = \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5),(6,6,6)\}$

- B : on obtient 421

$B =$

- C : la somme des dés est égale à 5.

$C =$

Définitions

Un événement est un sous-ensemble de Ω.

Exemple 2

On lance trois dés. On définit les événements

- A : les trois dés donnent le même numéro

$A = \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5),(6,6,6)\}$

- B : on obtient 421

$B = \{(1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2),(4,2,1)\}$

- C : la somme des dés est égale à 5.

$C =$

Définitions

Un événement est un sous-ensemble de Ω.

Exemple 2

On lance trois dés. On définit les événements

- A : les trois dés donnent le même numéro

$$A = \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5),(6,6,6)\}$$

- B : on obtient 421

$$B = \{(1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2),(4,2,1)\}$$

- C : la somme des dés est égale à 5.

$$C = \{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\}$$

Définitions

L'événement Ω est dit certain.

L'événement $\varnothing$ est dit impossible.

Un événement élémentaire est un singleton de Ω.

Définitions

Si A et B sont deux événements alors :

- $A \cap B$ est l'événement «A et B»

Définitions

Si A et B sont deux événements alors :

- $A \cap B$ est l'événement «A et B»
- $A \cup B$ est l'événement «A ou B»

Définitions

Si A et B sont deux événements alors :

- $A \cap B$ est l'événement «A et B»
- $A \cup B$ est l'événement «A ou B»
- $\overline{A}$ est l'événement contraire de A, ou «non A»

Définitions

Si A et B sont deux événements alors :

- $A \cap B$ est l'événement «A et B»
- $A \cup B$ est l'événement «A ou B»
- $\overline{A}$ est l'événement contraire de A, ou «non A»
- On note $A - B = A \cap \overline{B}$

Définitions

Si A et B sont deux événements alors :

- $A \cap B$ est l'événement «A et B»
- $A \cup B$ est l'événement «A ou B»
- $\overline{A}$ est l'événement contraire de A, ou «non A»
- On note $A - B = A \cap \overline{B}$
- A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$

Définitions

Si A et B sont deux événements alors :

- $A \cap B$ est l'événement «A et B»
- $A \cup B$ est l'événement «A ou B»
- $\overline{A}$ est l'événement contraire de A, ou «non A»
- On note $A - B = A \cap \overline{B}$
- A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$
- A et B sont complémentaires si $A = \overline{B}$, ou si $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$

Définitions

Si A et B sont deux événements alors :

- $A \cap B$ est l'événement «A et B»
- $A \cup B$ est l'événement «A ou B»
- $\overline{A}$ est l'événement contraire de A, ou «non A»
- On note $A - B = A \cap \overline{B}$
- A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$
- A et B sont complémentaires si $A = \overline{B}$, ou si $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$
- $A \subseteq B$ peut se lire : «A implique B»

Définition

Un système complet d'événements est un ensemble $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'événements tel que

- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
- Si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \varnothing$

Définition

Un système complet d'événements est un ensemble $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'événements tel que

- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
- Si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \varnothing$

Remarque

On dit aussi que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω.

Définition

Un système complet d'événements est un ensemble $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'événements tel que

- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
- Si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \varnothing$

Exemple

La famille $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.

Définition

Probabilité sur un univers fini Ω :

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

vérifiant :

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) (Additivité) Pour tout couple (A, B) d'événements **incompatibles** de Ω :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Définition

Probabilité sur un univers fini Ω :

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

vérifiant :

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) (Additivité) Pour tout couple (A, B) d'événements **incompatibles** de Ω :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Définition

Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P est une probabilité sur Ω.

Propositions

P probabilité sur Ω $\quad$ A, B événements

Propositions

P probabilité sur Ω A, B événements

(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

Propositions

P probabilité sur Ω $\qquad$ A, B événements

(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(ii) $P(\overline{A}) =$

Propositions

P probabilité sur Ω $\quad$ A, B événements

(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(iii) $P(\varnothing) =$

Propositions

P probabilité sur Ω $\quad$ A, B événements

(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(iii) $P(\varnothing) = 0$

(iv) Si $A \subseteq B$ $\quad$ alors

Propositions

P probabilité sur Ω A, B événements

(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(iii) $P(\varnothing) = 0$

(iv) Si $A \subseteq B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$

(v) $P(A - B) =$

Propositions

P probabilité sur Ω $\quad$ A, B événements

(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(iii) $P(\varnothing) = 0$

(iv) Si $A \subseteq B$ $\quad$ alors $\quad$ $P(A) \leqslant P(B)$

(v) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(vi) $P(A \cup B) =$

Propositions

P probabilité sur Ω $\quad A$, B événements

(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(iii) $P(\varnothing) = 0$

(iv) Si $A \subseteq B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$

(v) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Définition : Probabilité

$P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que : *(i)* $P(\Omega) = 1$
(ii) A, B incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Démonstration.

(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

$P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ donc :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega) \qquad P(A) \in [0,1]$$

Définition : Probabilité

$P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que : *(i)* $P(\Omega) = 1$
(ii) A, B incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Démonstration.

(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

A et $\overline{A}$ sont incompatibles donc par additivité :

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(A \cup \bar{A})$$

Or $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $P(\Omega) = 1$ donc :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Définition : Probabilité

$P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que : *(i)* $P(\Omega) = 1$
(ii) A, B incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

<u>Démonstration</u>.

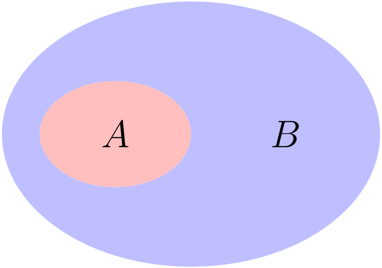
(iii) $P(\varnothing) = 0$

D'après le point précédent :

$$P(\varnothing) = 1 - P(\overline{\varnothing}) = 1 - P(\Omega) = 0$$

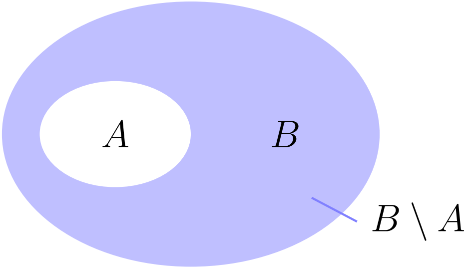
Démonstration.

(iv) $A \subseteq B \implies P(A) \leqslant P(B)$



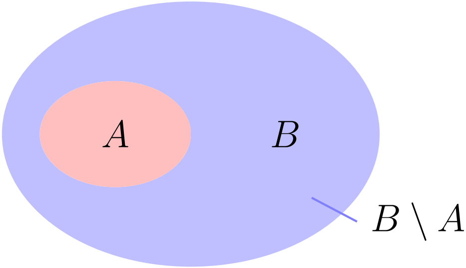
Démonstration.

(iv) $A \subseteq B \implies P(A) \leqslant P(B)$



Démonstration.

(iv) $A \subseteq B \implies P(A) \leqslant P(B)$

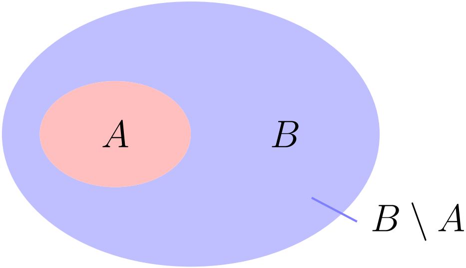


A et $B - A$ sont incompatibles et $B = A \cup (B - A)$.

Par additivité : $P(B) = P(A) + P(B - A)$

Démonstration.

(iv) $A \subseteq B \implies P(A) \leqslant P(B)$

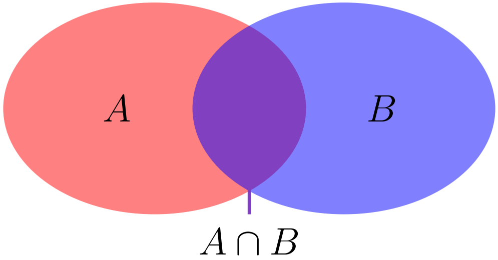


Par additivité : $P(B) = P(A) + P(B - A)$

$P(B - A) \geqslant 0$ d'après *(i)* donc : $P(B) \geqslant P(A)$

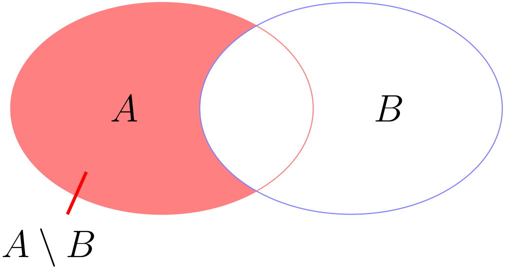
Démonstration.

(v) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



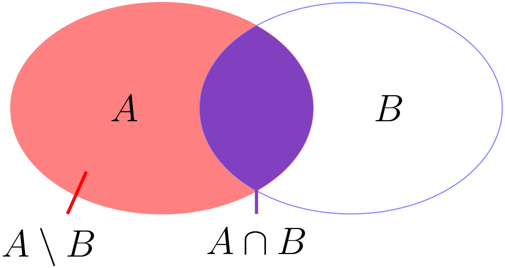
Démonstration.

(v) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



Démonstration.

(v) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

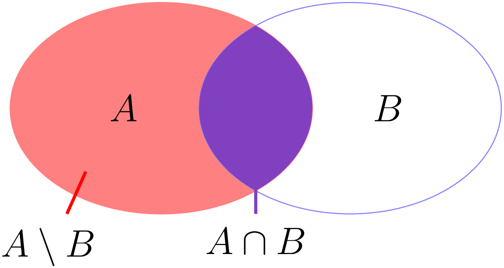


$A = (A - B) \cup (A \cap B)$ et $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$.

Par additivité : $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$

Démonstration.

(v) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

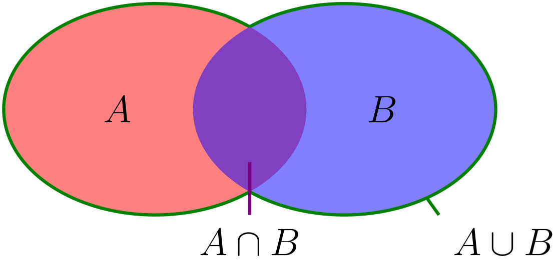


Par additivité : $P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$

donc $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

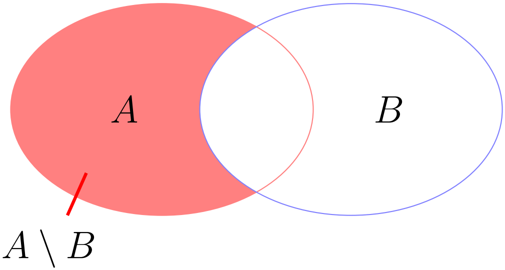
Démonstration.

(vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



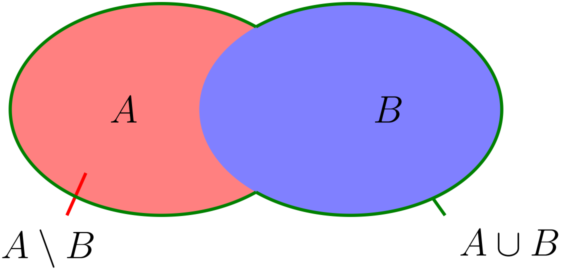
Démonstration.

(vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Démonstration.

(vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

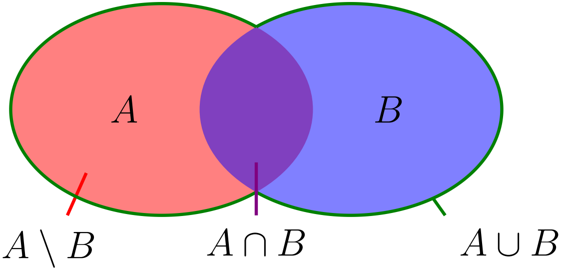


$$A \cup B = (A - B) \cup B \quad \text{et} \quad (A - B) \cap B = \varnothing$$

Par additivité : $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$.

Démonstration.

(vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Par additivité : $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$.

Grâce au point précédent on obtient le résultat. $\square$

▷ Exercice 1.

Soit A, B, C trois événements.
Déterminer la probabilité de $A \cup B \cup C$ en fonction des probabilités des événements A, B, C et de leurs intersections.

Propositions

$A_1 \ldots A_n$ événements

(i) Si les A_i sont deux-à-deux incompatibles alors

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Propositions

$A_1 \dots A_n$ événements

(i) Si les A_i sont deux-à-deux incompatibles alors

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(ii) Sinon :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Démonstration.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= P(A) + P(B) \quad \text{si } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles} \\
&\leqslant P(A) + P(B) \quad \text{sinon}
\end{aligned}
$$

Suite de la démonstration.

Soit $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $B = A_{n+1}$

Si les A_i sont deux-à-deux incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)$$

Suite de la démonstration.

Soit $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $B = A_{n+1}$

Sinon :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) \leqslant P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)$$

$\square$

Corollaire 1

$(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ système complet d'événements

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Corollaire 2

Ω univers fini

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1$$

Proposition

Une probabilité sur un univers fini est entièrement déterminée par les images des événements élémentaires.

Proposition (précision de la précédente)

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ $\qquad$ $p_1, \dots, p_n$ réels tels que

(i) $\forall k = 1, \dots, n \qquad p_k \in [0, 1]$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Alors il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad P(\{\omega_k\}) = p_k$$

Proposition (précision de la précédente)

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ $\qquad p_1, \ldots, p_n$ réels tels que

(i) $\forall k = 1, \ldots, n \qquad p_k \in [0, 1]$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Alors il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que :

$$\forall k = 1, \ldots, n \qquad P(\{\omega_k\}) = p_k$$

Cette probabilité est définie par :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega) \qquad P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k$$

Remarque

Ω ensemble fini.

Une distribution de probabilité sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs de somme égale à 1.

$$\begin{aligned} p : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \omega &\longmapsto p_\omega \end{aligned}$$

telle que $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1.$

Remarque

Ω ensemble fini.

Une distribution de probabilité sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs de somme égale à 1.

$$\begin{aligned} p : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \omega &\longmapsto p_\omega \end{aligned}$$

telle que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

Bijection : $\quad P \mapsto (\omega \mapsto P(\{\omega\}))$

▷ Exercice 2.

On possède un dé truqué : la probabilité que l'entier $k \in \{1, \ldots, 6\}$ apparaisse est proportionnelle à k.
Donner un espace probabilisé modélisant le lancer de ce dé, puis calculer la probabilité qu'on obtienne un résultat pair.

Définition

$\operatorname{Card} \Omega = n$

On définit une probabilité P sur Ω en posant :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$$

C'est la probabilité uniforme sur Ω.
On dit également qu'il y a équiprobabilité sur Ω.

Proposition

Si les événements élémentaires de Ω sont équiprobables, alors pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$$

Exemple 3

On possède une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.
Trois fois de suite on pioche une boule, on note le numéro obtenu et on la remet dans l'urne.

a. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.

Exemple 3

On possède une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.
Trois fois de suite on pioche une boule, on note le numéro obtenu et on la remet dans l'urne.

b. Calculer la probabilité des événements :

- A : «On obtient uniquement des 10.»
- B : «On n'obtient jamais le 10.»
- C : «On obtient au moins une fois le 10.»
- D : «On obtient exactement une fois le 10.»

▷ Exercice 3.

On possède une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.
Trois fois de suite on pioche une boule, on note le numéro obtenu et on garde la boule.

a. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.

b. Calculer la probabilité des événements :

- B : «On n'obtient jamais le 10.»
- C : «On obtient au moins une fois le 10.»
- D : «On obtient le 10 lors du troisième tirage.»

II. Probabilités conditionnelles

A. Définition

B. Propriétés

C. Événements indépendants

Définition

(Ω, P) espace probabilisé

A événement tel que $P(A) \neq 0$

B événement

Probabilité de B sachant A :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Définition

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Proposition

P_A est une probabilité sur Ω.

Définition

P_A est appelée probabilité conditionnée par A.
C'est une probabilité conditionnelle.

Définition

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Propositions (entre autres)

- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- Si $C \subseteq B$ alors : $P_A(C) \leqslant P_A(B)$
- Si $(B_1, \ldots, B_n)$ est un système complet d'événements alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_A(B_i) = 1$

Définition

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Proposition

P_A est une probabilité sur Ω.

Démonstration.

Définition

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Proposition

P_A est une probabilité sur Ω.

Démonstration.

$\square$

▷ Exercice 4.

On jette deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
Quelle est la probabilité que l'on obtienne deux piles sachant que l'on en a obtenu au moins un ?

II. Probabilités conditionnelles

Proposition

A, B événements de probabilités non-nulles

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P_B(A)P(B)$$

Proposition

A, B événements de probabilités non-nulles

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P_B(A)P(B)$$

<u>Démonstration</u>. Par définition :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \square$$

Théorème : Formule des probabilités composées

$(A_i)_{i=1\ldots n}$ famille d'événements telle que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ est non-nulle.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\ P_{A_1}(A_2)\ P_{A_1\cap A_2}(A_3)\ \ldots$$
$$\ldots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Théorème : Formule des probabilités composées

$(A_i)_{i=1\dots n}$ famille d'événements telle que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ est non-nulle.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1\cap A_2}(A_3)\, \dots \dots P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j}(A_i)$$

Théorème : Formule des probabilités composées

$(A_i)_{i=1\dots n}$ famille d'événements telle que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ est non-nulle.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\ P_{A_1}(A_2)\ P_{A_1\cap A_2}(A_3)\ \dots \dots P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exemple

Si $A_1 = A$ et $A_2 = B$ alors :

$$P(A\cap B) = P(A)P_A(B)$$

Théorème : Formule des probabilités composées

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\ P_{A_1}(A_2)\ P_{A_1\cap A_2}(A_3)\ \dots \\ \dots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration.

$$P(A_1) = P(A_1)$$

Théorème : Formule des probabilités composées

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\ P_{A_1}(A_2)\ P_{A_1\cap A_2}(A_3)\ \dots \\ \dots P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)$$

Théorème : Formule des probabilités composées

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\ P_{A_1}(A_2)\ P_{A_1\cap A_2}(A_3)\ \ldots$$
$$\ldots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1 \cap A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_3}(A_3) \end{aligned}$$

Théorème :
Formule des probabilités composées

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\ P_{A_1}(A_2)\ P_{A_1 \cap A_2}(A_3)\ \dots \\ \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration.

Par récurrence.

Théorème : Formule des probabilités composées

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\ P_{A_1}(A_2)\ P_{A_1\cap A_2}(A_3)\ \dots \\ \dots P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration.

Par récurrence. $\square$

Théorème : Formule des probabilités composées

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\ P_{A_1}(A_2)\ P_{A_1 \cap A_2}(A_3)\ \dots \\ \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarque

Lien avec les arbres de probabilités.

▷ Exercice 5.

On pioche des lettres successives dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet, sans les remettre. Pour tout $k \in \{0, \ldots, 26\}$ on note T_k l'événement : «le S apparaît au tirage k.»

a. Calculer directement $P_{\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_{i-1}}}(\overline{T_i})$.

b. Montrer que ceci permet de calculer la probabilité de S_k : «le S apparaît lors des k premiers tirages».

Théorème : Formule des probabilités totales

$(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ système complet d'événements de probabilités non-nulles, B événement.

Théorème : Formule des probabilités totales

$(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ système complet d'événements de probabilités non-nulles, B événement.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)$$

Théorème : Formule des probabilités totales

$(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ système complet d'événements de probabilités non-nulles, B événement.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$$

Exemple

Soit A un événement ni impossible, ni certain.
Alors pour tout événement B :

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})$$

Théorème : Formule des probabilités totales

$(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ système complet d'événements de probabilités non-nulles, B événement.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$$

Démonstration.

On pose $B_i = A_i \cap B$.

Théorème : Formule des probabilités totales

$(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ système complet d'événements de probabilités non-nulles, B événement.

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P_{A_i}(B)$$

<u>Démonstration</u>.

On pose $B_i=A_i\cap B$.

$\square$

Théorème : Formule des probabilités totales

$(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ système complet d'événements de probabilités non-nulles, B événement.

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P_{A_i}(B)$$

Exemple 4

On possède un dé et une pièce. On jette le dé. Si on obtient le chiffre k alors on jette k fois la pièce. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des Piles ?

Théorème : Inversion cause-effet

A, B de probabilités non-nulles

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

Théorème : Inversion cause-effet

A, B de probabilités non-nulles

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

Démonstration.

Théorème : Inversion cause-effet

A, B de probabilités non-nulles

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

Démonstration.

$\square$

Théorème : Formule de Bayes

$(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ système complet d'événements de probabilités non-nulles, B de probabilité non-nulle.

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)}$$

Exemple 4

On possède un dé et une pièce. On jette le dé. Si on obtient le chiffre k alors on jette k fois la pièce.
Quelle est la probabilité de n'obtenir que des Piles ?

Exemple 4 (suite)

On n'a obtenu que des Piles.
Quelle est la probabilité que le dé ait donné k ?

▷ Exercice 6.

On possède un sac avec des jetons numérotés de 1 à n : k jetons numérotés k pour tout $k = 1, \ldots, n$. On possède aussi n urnes $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_n$ contenant chacune k boules blanches et $n-k$ boules noires.

On pioche un jeton dans le sac. On obtient un numéro k. On pioche ensuite une boule dans l'urne $\mathscr{U}_k$.

a. Quelle est la probabilité que la boule obtenue soit blanche ?

b. La boule obtenue est blanche. Quelle est la probabilité, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, qu'elle provienne de l'urne $\mathscr{U}_k$?

Définition

Deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité P si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité P si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Proposition

Si A est de probabilité non-nulle, alors A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P_A(B) = P(B)$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

▷ Exercice 7.

Démontrer que :

$$\begin{aligned} & A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ \iff \quad & A \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants} \\ \iff \quad & \overline{A} \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ \iff \quad & \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants.} \end{aligned}$$

Exemple 5

Une urne contient $n \geqslant 2$ boules dont a sont noires et les autres sont blanches.
On pioche deux boules de suite dans cette urne, sans remise.
On note A l'événement «la première boule est noire» et B l'événement «la seconde boule est noire».

(i) Calculer $P(A)$, $P(B)$, puis $P(A \cap B)$.

(ii) A et B sont-ils indépendants ?

▷ Exercice 8.

Un jeu de 52 cartes possède 13 cœurs et 4 dames dont la dame de cœur.

On pioche une carte dans ce jeu. On note

- A : on obtient un cœur
- B : on obtient une dame

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Et si on enlève le roi de trèfle du jeu ?

Définition

$A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour tous entiers $i_1 \dots i_m$ tels que $1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n$:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_m})$$

Définition (autre écriture)

Soit $I = \{1, \ldots, n\}$

$(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants si :

$$\forall J \subseteq I \qquad P\left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Remarque

L'indépendance mutuelle a lieu dès que l'on répète des expériences identiques et indépendantes.

Exemple

On jette n fois un dé, et on note A_i l'événement : le tirage i donne un 6.
Alors les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

Remarque

L'indépendance des A_i deux-à-deux n'implique pas leur indépendance mutuelle.

Remarque

L'indépendance des A_i deux-à-deux n'implique pas leur indépendance mutuelle.

▷ Exercice 9.

On lance deux dés, un rouge et un bleu, et on définit les événements :

- A : Le dé rouge donne 6
- B : Le dé bleu donne 6
- C : La somme des deux dés est égale à 7

Vérifier que A, B, C sont deux-à-deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Définition

Variable aléatoire :

$$X : \Omega \to E$$

$X(\Omega)$: ensemble des valeurs que peut prendre X.

Définition

Variable aléatoire :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$X(\Omega)$: ensemble des valeurs que peut prendre X.

Définition

Variable aléatoire :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

$X(\Omega)$: ensemble des valeurs que peut prendre X.

Définition

Variable aléatoire réelle :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$X(\Omega)$: ensemble des valeurs que peut prendre X.

Définition

Variable aléatoire entière :

$$X : \Omega \to \mathbb{Z}$$

$X(\Omega)$: ensemble des valeurs que peut prendre X.

Définition

Variable aléatoire entière :

$$X : \Omega \to \mathbb{N}$$

$X(\Omega)$: ensemble des valeurs que peut prendre X.

Définition

Variable aléatoire réelle :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$X(\Omega)$: ensemble des valeurs que peut prendre X.

Définition

Un variable aléatoire réelle X est entière si :

$$X(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$$

Définition

Variable aléatoire réelle :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$X(\Omega)$: ensemble des valeurs que peut prendre X.

Notations

$$\begin{array}{rcl}
(X = x) & = & X^{-1}(\{x\}) \\
(X \leqslant x) & = & X^{-1}(]-\infty, x]) \\
(X > x) & = & X^{-1}(]x, +\infty[) \\
(a \leqslant X \leqslant b) & = & X^{-1}([a, b]) \\
& \ldots &
\end{array}$$

Proposition

L'ensemble

$$\{(X = x) \mid x \in X(\Omega)\}$$

est un système complet d'événements.

Proposition

L'ensemble

$$\{(X = x) \mid x \in X(\Omega)\}$$

est un système complet d'événements.

Démonstration.

X prend une et une seule valeur de $X(\Omega)$. $\square$

Proposition

L'ensemble

$$\{(X = x) \mid x \in X(\Omega)\}$$

est un système complet d'événements.

Remarques

(i) L'événement $(X = x)$ est une partie de Ω.

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

Proposition

L'ensemble

$$\{(X = x) \mid x \in X(\Omega)\}$$

est un système complet d'événements.

Remarques

Donc on peut écrire la partition :

$$\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$$

Proposition

L'ensemble

$$\{(X = x) \mid x \in X(\Omega)\}$$

est un système complet d'événements.

Remarques

Donc on peut écrire la partition :

$$\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} X^{-1}(\{x\})$$

Proposition

L'ensemble

$$\{(X = x) \mid x \in X(\Omega)\}$$

est un système complet d'événements.

Remarques

Donc on peut écrire la partition :

$$\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

Remarques

(ii) Plus généralement :

Si $f : E \to F$ est surjective alors

$$\left\{ f^{-1}(\{y\}) \;\middle|\; y \in F \right\}$$

est une partition de E.

Définition

Loi de probabilité :

$$P_X : X(\Omega) \to \mathbb{R}$$

(i) $\forall x \in X(\Omega) \quad P_X(x) \geqslant 0$

(ii) $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P_X(x) = 1$

Définition

Loi de probabilité :

$$P_X : X(\Omega) \to \mathbb{R}$$

(i) $\forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) \geqslant 0$

(ii) $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$

Définition

Loi de probabilité :

$$P_X : X(\Omega) \to \mathbb{R}$$

(i) $\forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) \geqslant 0$

(ii) $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$

Remarques

(i) Si $P : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une probabilité sur Ω alors

$$P_X : x \mapsto P(X = x)$$

est une loi de probabilité de X.

Remarques

(ii) Si $p : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une loi de probabilité alors :

$$\forall x \in X(\Omega) \qquad 0 \leqslant p(x) \leqslant 1$$

$$\forall x_0 \in X(\Omega) \qquad 0 \leqslant p(x_0) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} p(x)$$

Remarques

(ii) Si $p : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une loi de probabilité alors :

$$\forall x \in X(\Omega) \qquad 0 \leqslant p(x) \leqslant 1$$

$$\forall x_0 \in X(\Omega) \qquad 0 \leqslant p(x_0) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} p(x) = 1$$

Remarques

(iii) $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$

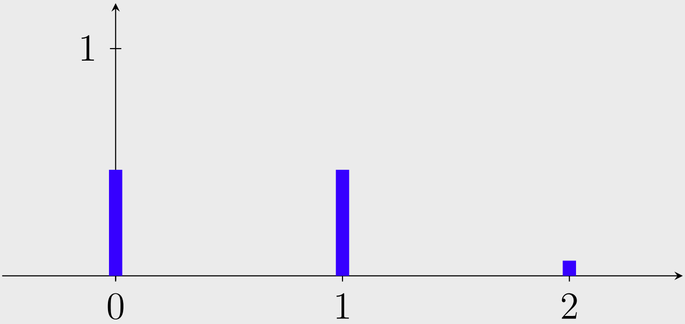
Une loi de probabilité est une application :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ x_i &\longmapsto p_i \end{aligned}$$

telle que : $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Remarque

Diagramme en bâtons :



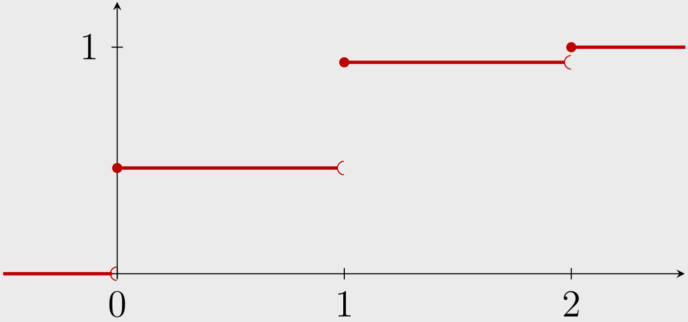
Définition

Fonction de répartition $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto P(X \leqslant x)$$

C'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$
en escalier
croissante
continue à droite.

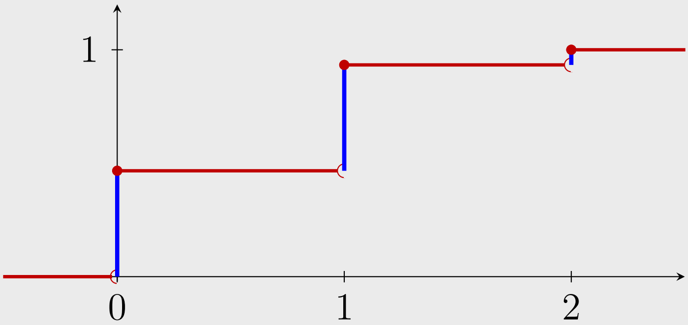
Remarque

(ii) Fonction de répartition :



Remarque

(ii) Fonction de répartition :



Remarque

Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k - 1)$$

Remarque

Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k - 1) \\ &= P(X < k + 1) - P(X < k) \end{aligned}$$

Remarque

Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) \\ &= P(X < k+1) - P(X < k) \\ &= P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k+1) \\ &= P(X > k-1) - P(X > k) \end{aligned}$$

▷ Exercice 10.

On jette deux dés et on note X la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

a. Déterminer $X(\Omega)$ puis les $P(X \leqslant k)$.

b. En déduire la loi de X.

c. Calculer l'espérance de X.

Définitions

- Espérance : $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$

Définitions

- Espérance : $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$
- Variance : $V(X) = E((X - E(X))^2)$

Définitions

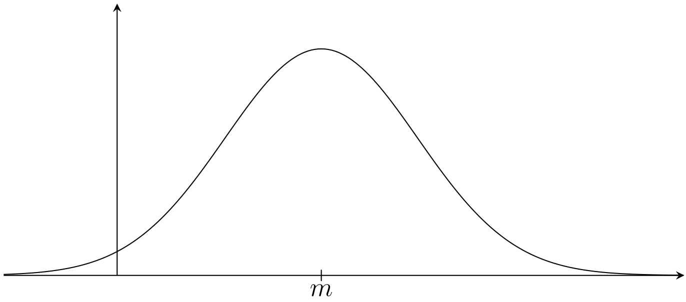
- Espérance : $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$
- Variance : $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques

(i) Espérance mathématique : moyenne

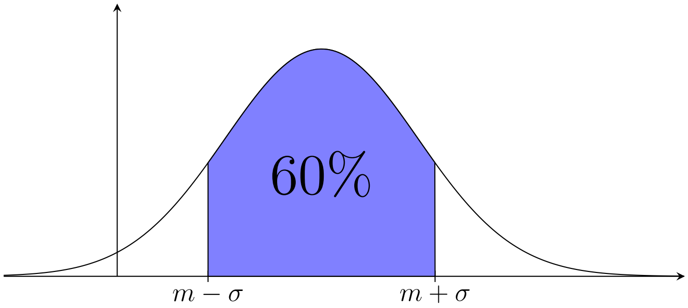
Remarques

(ii) V et σ sont des paramètres de dispersion.



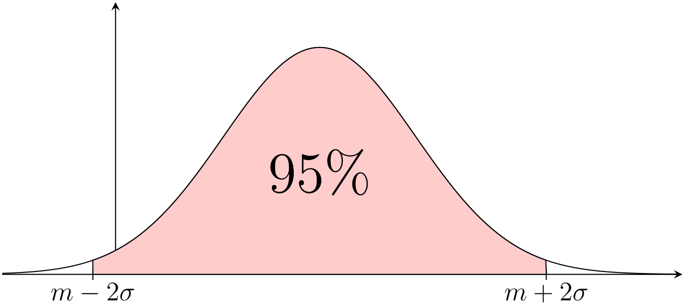
Remarques

(ii) V et σ sont des paramètres de dispersion.



Remarques

(ii) V et σ sont des paramètres de dispersion.



Remarques

(iii) Si X a une unité, alors $E(X)$ et $\sigma(X)$ ont également cette unité.

▷ Exercice 11.

Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $n = \max X(\Omega)$. Démontrer que :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$$

Définition alternative de l'espérance

X variable aléatoire sur (Ω, P) fini.

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

Démonstration. On sait que :

$$\forall x \in X(\Omega) \qquad (X = x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

Donc

$$P(X = x) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} P(\{\omega\})$$

Démonstration.

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} P(\{\omega\}) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)=x}} P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)=x}} xP(\{\omega\})
\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} P(\{\omega\})\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} xP(\{\omega\})\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} X(\omega)P(\{\omega\})
\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} x P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} X(\omega) P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque

La propriété utilisée est : Soit

- $(A_1, \ldots, A_n)$ est une partition de E
- $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction.

Alors :

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{x \in A_k} f(x) \right)$$

III. Variables aléatoires

A. Définitions

B. Espérance, variance, écart-type

C. Propriétés

Théorème de transfert

$f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

Théorème de transfert

$f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

Remarque

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

Théorème de transfert

$f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

Remarque

$$E({\color{blue}f(}X{\color{blue})}) = \sum_{x \in X(\Omega)} {\color{blue}f(}x{\color{blue})} P(X = x)$$

Remarque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire sur Ω :

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "Y"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Remarque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire sur Ω :

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "Y"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Alors $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$:

Remarque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire sur Ω :

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "Y"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Alors $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$:

$$P(Y = y) = P(f(X) = y)$$

Remarque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire sur Ω :

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "Y"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Alors $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$:

$$P(Y = y) = P(f(X) = y) = P(X \in f^{-1}(\{y\}))$$

Remarque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire sur Ω :

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "Y"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Alors $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$:

$$P(Y = y) = P(X \in f^{-1}(\{y\})) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} P(X = x)$$

Remarque

$$\forall y \in Y(\Omega) \qquad P(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} P(X = x)$$

Exemple

$$P(X^2 = 4) = P(X = 2) + P(X = -2)$$

Démonstration du théorème de transfert.

Soit $Y = f(X)$.

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y P(Y = y)$$

Démonstration du théorème de transfert.

Soit $Y = f(X)$.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y P(Y = y) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} y P(X = x) \right) \end{aligned}$$

Démonstration du théorème de transfert.

Soit $Y = f(X)$.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y P(Y = y) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} y P(X = x) \right) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x) \end{aligned} \qquad \square$$

Corollaire

$$E(aX+b) =$$

$$V(aX+b) =$$

$$\sigma(aX+b) =$$

Corollaire

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$V(aX+b) =$$

$$\sigma(aX+b) =$$

Corollaire

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b) =$$

Corollaire

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

Corollaire

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

Démonstration pour l'espérance.

Corollaire

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

Démonstration pour l'espérance.

$\square$

Corollaire

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

▷ Exercice 12.

Démontrer la formule donnant $V(aX+b)$.

Exemple

$Y = X - E(X)$ est centrée :

$$E(Y) = \qquad\qquad V(Y) =$$

Exemple

$Y = X - E(X)$ est centrée :

$$E(Y) = 0 \qquad V(Y) =$$

Exemple

$Y = X - E(X)$ est centrée :

$$E(Y) = 0 \qquad\qquad V(Y) = V(X)$$

Exemple

$Y = X - E(X)$ est centrée :

$$E(Y) = 0 \qquad\qquad V(Y) = V(X)$$

$T = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite :

$$E(T) = \qquad\qquad \sigma(T) =$$

Exemple

$Y = X - E(X)$ est centrée :

$$E(Y) = 0 \qquad V(Y) = V(X)$$

$T = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite :

$$E(T) = 0 \qquad \sigma(T) =$$

Exemple

$Y = X - E(X)$ est centrée :

$$E(Y) = 0 \qquad V(Y) = V(X)$$

$T = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite :

$$E(T) = 0 \qquad \sigma(T) = 1$$

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Remarque

Théorème de transfert :

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x)$$

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) - \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x) \right)^2 \end{aligned}$$

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) - \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x) \right)^2$$

Remarque

$E(X)^2$ et $E(X^2)$ sont différents

(sauf si X est constante).

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration.

Proposition - Formule de König-Huyghens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration.

$\square$

▷ Exercice 13.

Soit $b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire telle que :

$$X(\Omega) = \{b\}.$$

Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance et son écart-type.

▷ Exercice 14.

On pioche une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro obtenu.

a. Déterminer la loi de X.

b. Calculer son espérance, sa variance et son écart-type.

Prochain chapitre

Chapitre C2
Dénombrement