Mathématiques

Chapitre B14
Fractions rationnelles

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

I. Définitions

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathbb{C}$$

Définition

Fraction rationnelle : quotient de deux polynômes dont le dénominateur est non-nul.

Définition

Fraction rationnelle : quotient de deux polynômes dont le dénominateur est non-nul.

Notation

$$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{P}{Q} \;\middle|\; (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^* \right\}$$

Remarques

(i) Deux fractions rationnelles $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont égales si et seulement si $P_1Q_2 = P_2Q_1$.

(ii) L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ est muni :

- d'une addition (notée $+$),
- d'une multiplication interne (notée $\times$),
- d'une multiplication par un scalaire (notée $\cdot$).

Remarques

(i) Deux fractions rationnelles $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont égales si et seulement si $P_1Q_2 = P_2Q_1$.

(ii) Il possède :

- un élément neutre pour l'addition : $0 = \frac{0}{1}$
- un élément neutre pour la multiplication : $1 = \frac{1}{1}$

Tout élément possède un opposé : $-\frac{P}{Q} = \frac{-P}{Q}$

Remarques

(i) Deux fractions rationnelles $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont égales si et seulement si $P_1Q_2 = P_2Q_1$.

(iii) Un élément $\frac{P}{Q}$ est non-nul si et seulement si il est de la forme $\frac{P}{Q}$ avec P non-nul.
Tout élément non-nul est inversible, c'est-à-dire qu'il possède un inverse dans $\mathbb{K}(X)$. En effet l'inverse de $\frac{P}{Q}$ est : $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-1} = \frac{Q}{P}$

Propositions

(i) Le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

(ii) Le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif.

Propositions

(i) Le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

(ii) Le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif.

Démonstration.

Propositions

(i) Le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

(ii) Le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif.

Démonstration.

$\square$

Rappels

(i) Lemme de Gauss : Soit A, B, C trois polynômes. Si A est premier avec B et A divise BC alors A divise C.

Rappels

(ii) Soit P et Q deux polynômes non-nuls.
Un PGCD de P et Q est un polynôme de degré maximal divisant P et Q.
Le PGCD de P et Q est le polynôme unitaire de degré maximal divisant P et Q.
Il est noté $P \wedge Q$.

Rappels

(iii) Deux polynômes P et Q sont *associés* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$.
Ceci a lieu si et seulement si $P \mid Q$ et $Q \mid P$.

Définition

Soit F un élément de $\mathbb{K}(X)$. Une forme irréductible de F est une écriture $F = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux.

Définition

Soit F un élément de $\mathbb{K}(X)$. Une forme irréductible de F est une écriture $F = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux.
Si Q est unitaire alors on dit que cette forme irréductible est unitaire.

Proposition

Toute fraction rationnelle admet une forme irréductible.

Toute fraction rationnelle admet une unique forme irréductible unitaire.

Proposition

Toute fraction rationnelle admet une forme irréductible.

Toute fraction rationnelle admet une unique forme irréductible unitaire.

Démonstration.

Proposition

Toute fraction rationnelle admet une forme irréductible.

Toute fraction rationnelle admet une unique forme irréductible unitaire.

Démonstration.

$\square$

▷ Exercice 1.

Donner une forme irréductible des fractions rationnelles suivantes.

$$F_1 = \frac{X^3 - 2X^2 - 9}{X^2 + 2X - 15} \qquad F_2 = \frac{X^2 - 1}{X^3 - 1}$$

$$F_3 = \frac{X^4 + 1}{X^2 + 1} \qquad F_4 = \frac{3X^3 + X^2 - 2X - 2}{2X^3 + 2X^2 - 3X - 1}$$

Proposition

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle.
Il existe un unique couple (A, R) tel que :

$$\frac{P}{Q} = A + \frac{R}{Q} \qquad \text{et} \qquad \deg R < \deg Q$$

On dit que A est la partie entière de F.

Proposition

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle.
Il existe un unique couple (A, R) tel que :

$$\frac{P}{Q} = A + \frac{R}{Q} \qquad \text{et} \qquad \deg R < \deg Q$$

On dit que A est la partie entière de F.

Démonstration. Il s'agit exactement du théorème de division euclidienne, appliqué à P et Q. Celui-ci est valable car Q est non-nul. $\square$

▷ Exercice 2.

Déterminer les parties entières de :

$$F_1 = \frac{X^2+1}{X+1} \qquad F_2 = \frac{X^5-X^2}{X^2+X+1}$$

$$F_3 = \frac{X^4-5X^3-9X+3}{X^2-2X+2}$$

$$F_4 = \frac{X^n}{X-a} \qquad F_5 = \frac{X^{15}}{(X^2+3X+2)^7}$$

Proposition

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle.
Il existe un unique couple (A, R) tel que :

$$\frac{P}{Q} = A + \frac{R}{Q} \qquad \text{et} \qquad \deg R < \deg Q$$

On dit que A est la partie entière de F.

Remarques

(i) Si $\deg P \geqslant \deg Q$ alors :

$$\deg A = \deg P - \deg Q$$

Proposition

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle.
Il existe un unique couple (A, R) tel que :

$$\frac{P}{Q} = A + \frac{R}{Q} \qquad \text{et} \qquad \deg R < \deg Q$$

On dit que A est la partie entière de F.

Remarques

(i) Si $\deg P \geqslant \deg Q$ alors :

$$\deg A = \deg P - \deg Q$$

(ii) Si $\deg P < \deg Q$ alors $A = 0$.

Proposition

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle.
Il existe un unique couple (A, R) tel que :

$$\frac{P}{Q} = A + \frac{R}{Q} \qquad \text{et} \qquad \deg R < \deg Q$$

On dit que A est la partie entière de F.

▷ Exercice 3.

Quelles fractions rationnelles sont égales à leur partie entière ?

Définition

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle non-nulle.
Le degré de F est :

$$\deg \frac{P}{Q} = \deg P - \deg Q$$

Remarque

Si $F = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ alors :

$$P_1 Q_2 = P_2 Q_1$$

Remarque

Si $\quad F = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2} \quad$ alors :

$$P_1 Q_2 = P_2 Q_1$$

Donc :

$$\deg P_1 + \deg Q_2 = \deg P_2 + \deg Q_1$$

Remarque

Si $F = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ alors :

$$P_1 Q_2 = P_2 Q_1$$

Donc :

$$\deg P_1 + \deg Q_2 = \deg P_2 + \deg Q_1$$

Puis :

$$\deg P_1 - \deg Q_1 = \deg P_2 - \deg Q_2$$

Remarque

Si $\quad F = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2} \quad$ alors :

$$P_1 Q_2 = P_2 Q_1$$

Donc :

$$\deg P_1 + \deg Q_2 = \deg P_2 + \deg Q_1$$

Puis :

$$\deg P_1 - \deg Q_1 = \deg P_2 - \deg Q_2$$

Le degré de F est bien défini.

Proposition

Pour toutes fractions rationnelles F et G non-nulles :

$$\deg(F+G) = ? \qquad \deg(FG) = ?$$

▷ Exercice 4.

Compléter et démontrer ces formules.

Remarque

On convient que :

$$\deg 0 = -\infty$$

Les formules ci-dessus restent valables.

▷ Exercice 5.

Quelle est la partie entière d'une fraction rationnelle de degré nul ?

Définition

$F = \dfrac{P}{Q}$ sous forme irréductible.

(i) Les racines ou zéros de F sont les racines de P.

(ii) Les pôles de F sont les racines de Q.

Définition

$F = \dfrac{P}{Q}$ sous forme irréductible.

(i) Les racines ou zéros de F sont les racines de P.

(ii) Les pôles de F sont les racines de Q.

(iii) L'ordre de multiplicité d'une racine de F est son ordre de multiplicité en tant que racine de P.

(iv) L'ordre de multiplicité d'un pôle de F est son ordre de multiplicité en tant que racine de Q.

Remarque

Si $F = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ sous forme irréductible alors :

$$P_1 = \lambda P_2 \qquad \text{et} \qquad Q_2 = \lambda Q_1$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Remarque

Si $F = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ sous forme irréductible alors :

$$P_1 = \lambda P_2 \qquad \text{et} \qquad Q_2 = \lambda Q_1$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Les racines de P_1 sont celles de P_2,
Les racines de Q_1 sont celles de Q_2,

Remarque

Si $F = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ sous forme irréductible alors :

$$P_1 = \lambda P_2 \qquad \text{et} \qquad Q_2 = \lambda Q_1$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Les racines de P_1 sont celles de P_2,
Les racines de Q_1 sont celles de Q_2,
avec les mêmes multiplicités.

Remarque

Si $F = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ sous forme irréductible alors :

$$P_1 = \lambda P_2 \qquad \text{et} \qquad Q_2 = \lambda Q_1$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Les racines de P_1 sont celles de P_2,
Les racines de Q_1 sont celles de Q_2,
avec les mêmes multiplicités.

La définition des racines et pôles de F ainsi que celle de leurs ordres de multiplicité est donc correcte.

Exemple

$$F = \frac{X^4(X-3)(X-2)^3}{(X^2-4)^7}$$

Définition

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$,

$\mathscr{P}$ l'ensemble de ses pôles et $\mathscr{D} = \mathbb{K} \setminus \mathscr{P}$

La fonction $\begin{array}{rcl} f : \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & F(x) \end{array}$

est appelée fonction rationnelle.

Théorème

$n \in \mathbb{N}$

- $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ scalaires distincts,
- $\beta_0, \ldots, \beta_n$ scalaires.

Il existe un et un seul $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall i = 0, \ldots, n \qquad P(\alpha_i) = \beta_i \tag{$\star$}$$

Théorème

$n \in \mathbb{N}$

- $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ scalaires distincts,
- $\beta_0, \ldots, \beta_n$ scalaires.

Il existe un et un seul $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall i = 0, \ldots, n \qquad P(\alpha_i) = \beta_i \tag{$\star$}$$

Remarque

$(n+1)$ points d'abscisses distinctes.

Il existe une et une seule courbe polynomiale de degré au plus n passant par ces $(n+1)$ points.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), \ldots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), \ldots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

- Φ est linéaire.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

- Φ est linéaire.
- Φ est injective.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) \end{array}$$

- Φ est linéaire.
- Φ est injective.
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1}$
  Théorème du rang : Φ est bijective.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}\\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), \ldots, P(\alpha_n))\end{aligned}$$

- Φ est linéaire.
- Φ est injective.
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1}$
  Théorème du rang : Φ est bijective.
- $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, donc :

$$\exists! P \in \mathbb{K}_n[X] \qquad \Phi(P) = \beta$$

□

$$\begin{array}{rcl}\Phi : \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n))\end{array}$$

Remarque

$$\Phi(L_i) = e_i$$

$$\iff \quad (L_i(\alpha_0), \dots, L_i(\alpha_n)) = e_i$$

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

Remarque

$$\begin{aligned} & \Phi(L_i) = e_i \\ \iff \quad & (L_i(\alpha_0), \dots, L_i(\alpha_n)) = e_i \\ \iff \quad & L_i = \lambda \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} (X - \alpha_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), \ldots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

Remarque

$$\Phi(L_i) = e_i$$

$$\iff \quad (L_i(\alpha_0), \ldots, L_i(\alpha_n)) = e_i$$

$$\iff \quad L_i = \lambda \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} (X - \alpha_k)$$

Avec :

$$\lambda = 1 / \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} (\alpha_i - \alpha_k)$$

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) \end{array}$$

Remarque

$$L_i = \Phi^{-1}(e_i) = \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$$

Définition

$$T = (X - \alpha_0) \dots (X - \alpha_n)$$

Définition

$$T = (X - \alpha_0) \dots (X - \alpha_n)$$

puis :

$$\forall i = 0, \dots, n \qquad P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)}$$

Définition

$$T = (X - \alpha_0) \dots (X - \alpha_n)$$

puis :

$$\forall i = 0, \dots, n \qquad P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)}$$

puis :

$$\forall i = 0, \dots, n \qquad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

Définition

$$T = (X - \alpha_0) \dots (X - \alpha_n)$$

puis :

$$\forall i = 0, \dots, n \qquad P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)}$$

puis :

$$\forall i = 0, \dots, n \qquad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

(L_i) : Polynômes d'interpolations de Lagrange

Théorème (suite)

Le polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\star)$ est :

$$P = \beta_0 L_0 + \cdots + \beta_n L_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$$

Théorème (suite)

Le polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\star)$ est :

$$P = \beta_0 L_0 + \cdots + \beta_n L_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$$

Démonstration.

$$P = \Phi^{-1}(\beta_0, \ldots, \beta_n)$$

Théorème (suite)

Le polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\star)$ est :

$$P = \beta_0 L_0 + \cdots + \beta_n L_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$$

Démonstration.

$$P = \Phi^{-1}(\beta_0, \ldots, \beta_n) = \Phi^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i e_i\right)$$

Théorème (suite)

Le polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\star)$ est :

$$P = \beta_0 L_0 + \cdots + \beta_n L_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} P &= \Phi^{-1}(\beta_0, \ldots, \beta_n) = \Phi^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \beta_i \Phi^{-1}(e_i) \end{aligned}$$

Théorème (suite)

Le polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\star)$ est :

$$P = \beta_0 L_0 + \cdots + \beta_n L_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$$

Démonstration.

$$P = \Phi^{-1}(\beta_0, \ldots, \beta_n) = \Phi^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i e_i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \beta_i \Phi^{-1}(e_i) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i \qquad \square$$

Proposition

Soit $P_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\star)$.

Soit $\quad T = (X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_n)$.

Les polynômes vérifiant $(\star)$ sont :

Proposition

Soit $P_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\star)$.

Soit $\quad T = (X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_n)$.

Les polynômes vérifiant $(\star)$ sont :

$$P = P_0 + AT \quad \text{où} \quad A \in \mathbb{R}[X]$$

Proposition

Soit $P_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\star)$.

Soit $\quad T = (X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_n)$.

Les polynômes vérifiant $(\star)$ sont :

$$P = P_0 + AT \quad \text{où} \quad A \in \mathbb{R}[X]$$

Démonstration. $\forall i = 0, \ldots, n \quad P(\alpha_i) = \beta_i$

$$\forall i = 0, \ldots, n \quad P_0(\alpha_i) = \beta_i$$

Proposition

Soit $P_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\star)$.

Soit $\quad T = (X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_n)$.

Les polynômes vérifiant $(\star)$ sont :

$$P = P_0 + AT \quad \text{où} \quad A \in \mathbb{R}[X]$$

Démonstration. $\forall i = 0, \ldots, n \quad P(\alpha_i) = \beta_i$

$$\forall i = 0, \ldots, n \quad P_0(\alpha_i) = \beta_i$$

$$\forall i = 0, \ldots, n \quad (P - P_0)(\alpha_i) = 0$$

Proposition

Soit $P_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\star)$.

Soit $\quad T = (X-\alpha_0)\cdots(X-\alpha_n)$.

Les polynômes vérifiant $(\star)$ sont :

$$P = P_0 + AT \quad \text{où} \quad A \in \mathbb{R}[X]$$

Démonstration. $\forall i = 0, \dots, n \quad P(\alpha_i) = \beta_i$

$$\forall i = 0, \dots, n \quad P_0(\alpha_i) = \beta_i$$

$$\forall i = 0, \dots, n \quad (P - P_0)(\alpha_i) = 0$$

Donc $T \mid P - P_0$,

Proposition

Soit $P_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\star)$.

Soit $\quad T = (X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_n)$.

Les polynômes vérifiant $(\star)$ sont :

$$P = P_0 + AT \quad \text{où} \quad A \in \mathbb{R}[X]$$

Démonstration. $\forall i = 0, \dots, n \quad P(\alpha_i) = \beta_i$

$$\forall i = 0, \dots, n \quad P_0(\alpha_i) = \beta_i$$

$$\forall i = 0, \dots, n \quad (P - P_0)(\alpha_i) = 0$$

Donc $T \mid P - P_0$, $P = P_0 + AT$ avec $A \in \mathbb{K}[X]$. $\square$

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

Matrice de Vandermonde

Soit $A = M_{\mathscr{B}_0 \mathscr{C}}(\Phi)$.

$$\begin{array}{rrcl} \Phi : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & (P(\alpha_0), \ldots, P(\alpha_n)) \end{array}$$

Matrice de Vandermonde

Soit $A = M_{\mathscr{B}_0 \mathscr{C}}(\Phi)$.

A est une matrice de Vandermonde.

$$\det A = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Φ est un isomorphisme car les α_i sont distincts.

Matrice de Vandermonde

Soit $A = M_{\mathscr{B}_0 \mathscr{C}}(\Phi)$.

La famille $\mathscr{B} = (L_0, \ldots, L_n) = \Phi^{-1}(\mathscr{C})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Matrice de Vandermonde

Soit $A = M_{\mathscr{B}_0\mathscr{C}}(\Phi)$.

La famille $\mathscr{B} = (L_0, \ldots, L_n) = \Phi^{-1}(\mathscr{C})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $P = P_{\mathscr{B}_0\mathscr{B}} = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}_0}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]})$.

Matrice de Vandermonde

Soit $A = M_{\mathscr{B}_0 \mathscr{C}}(\Phi)$.

La famille $\mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n) = \Phi^{-1}(\mathscr{C})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $P = P_{\mathscr{B}_0 \mathscr{B}} = M_{\mathscr{B} \mathscr{B}_0}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]})$.

Alors :

$$AP = M_{\mathscr{B} \mathscr{C}}(\Phi \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}) = M_{\mathscr{B} \mathscr{C}}(\Phi) = I_{n+1}$$

Matrice de Vandermonde

Soit $A = M_{\mathscr{B}_0\mathscr{C}}(\Phi)$.

La famille $\mathscr{B} = (L_0, \ldots, L_n) = \Phi^{-1}(\mathscr{C})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $P = P_{\mathscr{B}_0\mathscr{B}} = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}_0}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]})$.

Alors :

$$AP = M_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\Phi \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}) = M_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\Phi) = I_{n+1}$$

P est la matrice inverse de A.

Orthogonalité

$E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in E^2 \qquad (\, P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) Q(\alpha_k)$$

Orthogonalité

$E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire :

$$\forall (P,Q) \in E^2 \qquad (\,P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$$

Pour tous i et j :

$$(\,L_i \mid L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(\alpha_k)L_j(\alpha_k) = \delta_{ij}$$

Orthogonalité

$E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in E^2 \qquad (\, P \,|\, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) Q(\alpha_k)$$

Pour tous i et j :

$$(\, L_i \,|\, L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(\alpha_k) L_j(\alpha_k) = \delta_{ij}$$

La base $(L_0, \ldots, L_n)$ est orthonormée.

Orthogonalité

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors pour tout i :

$$(P \mid L_i) = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_i(\alpha_k) = P(\alpha_i)$$

Orthogonalité

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors pour tout i :

$$(P \mid L_i) = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_i(\alpha_k) = P(\alpha_i)$$

Coordonnées de P dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$:

$$(P(\alpha_0), \ldots, P(\alpha_n))$$

Orthogonalité

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors pour tout i :

$$(P \mid L_i) = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_i(\alpha_k) = P(\alpha_i)$$

Coordonnées de P dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$:

$$(P(\alpha_0), \ldots, P(\alpha_n))$$

Donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad P = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_k$$

Orthogonalité

$E = \mathbb{R}_n[x]$ sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Orthogonalité

$E = \mathbb{R}_n[x]$ sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et :

$$f_n : x \mapsto f(\alpha_0)L_0(x) + \cdots + f(\alpha_n)L_n(x)$$

Alors f_n est la projetée orthogonale de f sur E.

Orthogonalité

$E = \mathbb{R}_n[x]$ sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et :

$$f_n : x \mapsto f(\alpha_0)L_0(x) + \cdots + f(\alpha_n)L_n(x)$$

Alors f_n est la projetée orthogonale de f sur E.

Elle vérifie :

$$\forall i = 0, \ldots n \qquad f_n(\alpha_i) = f(\alpha_i)$$

Remarque

Toute fraction rationnelle F s'écrit :

$$F = A + \frac{P}{Q}$$

où $(A, P, Q) \in \mathbb{K}[X]^3$ et $\deg P < \deg Q$.

Remarque

Toute fraction rationnelle F s'écrit :

$$F = A + \frac{P}{Q}$$

où $(A, P, Q) \in \mathbb{K}[X]^3$ et $\deg P < \deg Q$.

A est la partie entière de F.

Remarque

Toute fraction rationnelle F s'écrit :

$$F = A + \frac{P}{Q}$$

où $(A, P, Q) \in \mathbb{K}[X]^3$ et $\deg P < \deg Q$.

A est la partie entière de F.

En conséquence dans la suite on considérera uniquement des fractions rationnelles de degrés négatifs :

$$F = \frac{P}{Q} \quad \text{avec} \quad \deg P < \deg Q$$

Théorème 1

$\alpha_0, \dots, \alpha_n$ scalaires distincts. $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Alors il existe une unique famille $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ telle que :

$$\frac{P}{(X-\alpha_0)\cdots(X-\alpha_n)} = \frac{\lambda_0}{X-\alpha_0} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X-\alpha_n}$$

Exemples

$$\frac{X+1}{X(X+2)} =$$

$$\frac{X^2+2X+13}{(X^2-1)(X+3)} =$$

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)}$$

$$=$$

Exemples

$$\frac{X+1}{X(X+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{X} + \frac{1}{2}\frac{1}{X+2}$$

$$\frac{X^2+2X+13}{(X^2-1)(X+3)} =$$

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)}$$

$$=$$

Exemples

$$\frac{X+1}{X(X+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{X} + \frac{1}{2}\frac{1}{X+2}$$

$$\frac{X^2+2X+13}{(X^2-1)(X+3)} = \frac{2}{X-1} - \frac{3}{X+1} + \frac{2}{X+3}$$

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)}$$

$$=$$

Exemples

$$\frac{X+1}{X(X+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{X} + \frac{1}{2}\frac{1}{X+2}$$

$$\frac{X^2+2X+13}{(X^2-1)(X+3)} = \frac{2}{X-1} - \frac{3}{X+1} + \frac{2}{X+3}$$

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)}$$

$$= \frac{-1}{6(X-1)} + \frac{1}{2(X-2)} - \frac{1}{2(X-3)} + \frac{1}{6(X-4)}$$

Démonstration.

$$T = \prod_{k=0}^{n} (X - \alpha_k)$$

$$P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)} \qquad\qquad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

Démonstration.

$$T = \prod_{k=0}^{n} (X - \alpha_k)$$

$$P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)} \qquad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration.

$$T = \prod_{k=0}^{n} (X - \alpha_k)$$

$$P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)} \qquad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Donc la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration.

$$T = \prod_{k=0}^{n} (X - \alpha_k)$$

$$P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)} \qquad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Donc la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet des coordonnées dans cette base.

Démonstration.

$$T = \prod_{k=0}^{n} (X - \alpha_k)$$

$$P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)} \qquad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

Or :

$$\frac{P}{(X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_n)} = \frac{\lambda_0}{X - \alpha_0} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X - \alpha_n}$$

$$\iff \qquad P = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$$

Démonstration.

$$T = \prod_{k=0}^{n} (X - \alpha_k)$$

$$P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)} \qquad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

Or :

$$\frac{P}{(X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_n)} = \frac{\lambda_0}{X - \alpha_0} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X - \alpha_n}$$

$$\iff \qquad P = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n \qquad \square$$

Remarque

$$\frac{P}{\prod_{k=0}^{n}(X-\alpha_k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{X-\alpha_k}$$

Donc :

$$\frac{P}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}(X-\alpha_k)} = \lambda_i + \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \lambda_k \frac{X-\alpha_i}{X-\alpha_k}$$

Spécialisation en α_i :

$$\frac{P(\alpha_i)}{\prod_{k\neq i}(\alpha_i-\alpha_k)} = \lambda_i$$

Méthode

$F = \frac{P}{Q}$ avec α un pôle simple de F. Alors :

$$F = \frac{P}{(X-\alpha)Q_1} \qquad \text{avec} \qquad Q_1(\alpha) \neq 0$$

(i) Le coefficient de $\frac{1}{(X-\alpha)}$ dans la décomposition polaire de F est $\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$.

Méthode

$F = \frac{P}{Q}$ avec α un pôle simple de F. Alors :

$$F = \frac{P}{(X-\alpha)Q_1} \qquad \text{avec} \qquad Q_1(\alpha) \neq 0$$

(i) Le coefficient de $\frac{1}{(X-\alpha)}$ dans la décomposition polaire de F est $\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$.

(ii) On peut aussi utiliser la formule $\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

▷ Exercice 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer :

$$\frac{1}{X^n - 1}$$

en éléments simples.

Théorème 2

$\alpha \in \mathbb{K} \qquad n \in \mathbb{N}^*$

Pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ il existe une unique famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que :

$$\frac{P}{(X-\alpha)^n} = \frac{\lambda_1}{(X-\alpha)} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{(X-\alpha)^n}$$

Démonstration.

$$\frac{P}{(X-\alpha)^n} = \frac{\lambda_1}{(X-\alpha)} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{(X-\alpha)^n}$$

$\iff$

$$P = \lambda_n + \lambda_{n-1}(X-\alpha) + \cdots + \lambda_1 (X-\alpha)^{n-1}$$

Démonstration.

$$\frac{P}{(X-\alpha)^n} = \frac{\lambda_1}{(X-\alpha)} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{(X-\alpha)^n}$$

$\iff$

$$P = \lambda_n + \lambda_{n-1}(X-\alpha) + \cdots + \lambda_1 (X-\alpha)^{n-1}$$

La famille $\left((X-\alpha)^k \;\middle|\; 0 \leqslant k \leqslant n-1\right)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Démonstration.

$$\frac{P}{(X-\alpha)^n} = \frac{\lambda_1}{(X-\alpha)} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{(X-\alpha)^n}$$

$\iff$

$$P = \lambda_n + \lambda_{n-1}(X-\alpha) + \cdots + \lambda_1(X-\alpha)^{n-1}$$

La famille $\big((X-\alpha)^k \;\big|\; 0 \leqslant k \leqslant n-1\big)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Donc tout polynôme P de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ possède un unique n-uplet $(\lambda_n, \ldots, \lambda_1)$ de coordonnées dans cette base. $\square$

Méthode

Formule de Taylor pour les polynômes :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

Méthode

Formule de Taylor pour les polynômes :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

Donc :

$$\frac{P}{(X-\alpha)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!(X-\alpha)^{n-k}}$$

Méthode

Formule de Taylor pour les polynômes :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{P}{(X-\alpha)^n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!(X-\alpha)^{n-k}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{P^{(n-i)}(\alpha)}{(n-i)!(X-\alpha)^i} \end{aligned}$$

▷ Exercice 7.

Décomposer en éléments simples :

$$F_1 = \frac{3X+7}{(X+4)^2} \qquad F_2 = \frac{X^3-3X+1}{(X+1)^4}$$

$$F_3 = \frac{X^n}{(X-1)^{n+1}}$$

Remarque

On peut généraliser le théorème précédent en remplaçant $(X - \alpha)$ par un autre polynôme.

Remarque

On peut généraliser le théorème précédent en remplaçant $(X-\alpha)$ par un autre polynôme.

Proposition

$\deg Q = 2 \qquad \deg P \leqslant 2n-1$

$\exists!(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n)$

$$\frac{P}{Q^n} = \frac{\alpha_1 X+\beta_1}{Q} + \frac{\alpha_2 X+\beta_2}{Q^2} + \cdots + \frac{\alpha_n X+\beta_n}{Q^n}$$

▷ Exercice 8.

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F = \frac{(X+1)^3}{(X^2+1)^2}$$

Théorème 3

$$Q_1 \wedge Q_2 = 1 \qquad \deg Q_1 = a \quad \deg Q_2 = b$$

$$\forall P \in \mathbb{K}_{a+b-1}[X] \quad \exists!(P_1, P_2) \in \mathbb{K}_{a-1}[X] \times \mathbb{K}_{b-1}[X]$$

$$\frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$$

Théorème 3

$Q_1 \wedge Q_2 = 1 \quad \deg Q_1 = a \quad \deg Q_2 = b$

$\forall P \in \mathbb{K}_{a+b-1}[X] \quad \exists!(P_1, P_2) \in \mathbb{K}_{a-1}[X] \times \mathbb{K}_{b-1}[X]$

$$\frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$$

Démonstration.

Théorème 3

$Q_1 \wedge Q_2 = 1 \qquad \deg Q_1 = a \quad \deg Q_2 = b$

$\forall P \in \mathbb{K}_{a+b-1}[X] \quad \exists!(P_1, P_2) \in \mathbb{K}_{a-1}[X] \times \mathbb{K}_{b-1}[X]$

$$\frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$$

Démonstration.

□

Rappels

(i) Les polynômes irréductible de $\mathbb{C}[X]$ sont :

$$\lambda(X-\alpha) \qquad \text{avec} \qquad (\alpha,\lambda)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$$

Il s'agit des polynômes de degré 1.

Rappels

(i) Les polynômes irréductible de $\mathbb{C}[X]$ sont :

$$\lambda(X-\alpha) \qquad \text{avec} \qquad (\alpha,\lambda)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$$

Il s'agit des polynômes de degré 1.

(i') Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

- $\lambda(X-\alpha) \qquad \text{avec} \qquad (\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$
- Les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Rappels

(ii) Tout polynôme se décompose en produit de polynômes irréductibles.
Cette décomposition est unique à l'ordre près si on suppose que les facteurs sont unitaires et on ajoute le coefficient dominant.

Théorème - DES dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $F = \frac{P}{Q}$ avec :

$$Q = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1}\cdots(X-\alpha_n)^{m_n}$$

Alors on peut écrire de façon unique :

$$\frac{P}{Q} = A + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{\lambda_{i,k}}{(X-\alpha_i)^k}$$

Théorème - DES dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $F = \frac{P}{Q}$ avec :

$$Q = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1}\cdots(X-\alpha_n)^{m_n}$$

Alors on peut écrire de façon unique :

$$\frac{P}{Q} = A + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{\lambda_{i,k}}{(X-\alpha_i)^k}$$

Remarque

A est la partie entière de F.

▷ Exercice 9.

Décomposer en éléments simples :

$$F_1 = \frac{1}{X^3 - 3X + 2} \qquad F_2 = \frac{X^4 + 2X^3}{(X^2-1)^2}$$

▷ Exercice 10.
Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$

a. Soit $u_1, \ldots, u_n$ dérivables.
Donner une formule pour $(u_1 \ldots u_n)'$.

▷ Exercice 10.
Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

b. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines complexes de P, $m_1, \ldots m_n$ leurs multiplicités.
Donner une expression de $\frac{P'}{P}$, en déduire sa décomposition en éléments simples.

▷ Exercice 10.
Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

b. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines complexes de P, $m_1, \ldots m_n$ leurs multiplicités.
Donner une expression de $\frac{P'}{P}$, en déduire sa décomposition en éléments simples.

c. On suppose que les α_i sont réels.
Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{P'(x)}{P(x)}$.
Retrouver le résultat précédent.

Théorème - DES dans $\mathbb{R}(X)$

$F = \frac{P}{Q}$ avec :

$$Q = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1}\cdots(X-\alpha_n)^{m_n}\times Q_1^{p_1}\times\cdots\times Q_r^{p_r}$$

Alors on peut écrire de façon unique :

$$\frac{P}{Q} = A + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{\lambda_{i,k}}{(X-\alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{p_j}\frac{\mu_{j,\ell}X+\nu_{j,\ell}}{Q_j^{\ell}}$$

▷ Exercice 11.

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F_1 = \frac{X}{X^4 - 1} \qquad F_2 = \frac{X^5}{(X^2+1)^2}$$

Méthodes

- Spécialisation, passage à la limite.
- Conjugaison des complexes.
- Parité.

▷ Exercice 12.

Décomposer en éléments simples en spécialisant :

$$F = \frac{(X-1)(X-3)}{(X-2)(X-4)}$$

▷ Exercice 12.

Décomposer en éléments simples en spécialisant :

$$F = \frac{(X-1)(X-3)}{(X-2)(X-4)}$$

▷ Exercice 13.

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F = \frac{X^3}{(X^2+1)(X^2+2)}$$

a. en utilisant les complexes,

b. en utilisant la parité.

Méthode

La décomposition en éléments simples permet d'intégrer les fractions rationnelles.

Méthode

La décomposition en éléments simples permet d'intégrer les fractions rationnelles.

On commence par extraire la partie entière,

Méthode

La décomposition en éléments simples permet d'intégrer les fractions rationnelles.

On commence par extraire la partie entière, puis on factorise le dénominateur.

Méthode

La décomposition en éléments simples permet d'intégrer les fractions rationnelles.

On commence par extraire la partie entière, puis on factorise le dénominateur.

Parfois on peut intégrer directement !

$$\frac{u'}{u} \qquad \frac{u'}{u^2} \qquad \frac{u'}{1+u^2}$$

Rappels

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} =$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} =$$

$$\int \frac{}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\delta^2} =$$

Rappels

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} =$$

$$\int \frac{}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\delta^2} =$$

Rappels

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}}$$

$$\int \frac{}{ax^2+bx+c} dx =$$

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\delta^2} =$$

Rappels

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}}$$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\delta^2} =$$

Rappels

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}}$$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \ln\left(ax^2+bx+c\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\delta^2} =$$

Rappels

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}}$$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \ln\left(ax^2+bx+c\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\delta^2} = \frac{1}{\delta}\arctan\left(\frac{x-\beta}{\delta}\right)$$

▷ Exercice 14.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^3(x+1)}$$

▷ Exercice 14.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^3(x+1)}$$

▷ Exercice 15.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de :

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2+2x+2}$$

en partant de la forme désirée.

▷ Exercice 16.

Déterminer une primitive sur l'intervalle $]-1, 1[$ de :

$$x \mapsto \frac{1}{1 - x^4}$$

▷ Exercice 16.

Déterminer une primitive sur l'intervalle $]-1,1[$ de :

$$x \mapsto \frac{1}{1-x^4}$$

▷ Exercice 17.

Soit : $\quad f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

Déterminer une primitive de f :

a. en utilisant les complexes,

b. grâce à un changement de variable.

▷ Exercice 18.

Intégrer

$$f : x \mapsto \frac{(\cos\theta)x - 1}{x^2 - 2(\cos\theta)x + 1}$$

où θ est un réel non multiple de π.

▷ Exercice 19.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right[$:

$$f_k(x) = \frac{x^k}{x^3 - 1} \qquad \text{et} \qquad F_k(x) = \int_0^x f_k(t)\,dt$$

a. Calculer F_2 puis $F_2 + F_1 + F_0$ et enfin $F_1 - F_0$.

b. En déduire la décomposition de $\frac{1}{X^3-1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Remarque

La décomposition en éléments simples est parfois utilisée pour calculer la somme d'une série.

Remarque

La décomposition en éléments simples est parfois utilisée pour calculer la somme d'une série.

▷ Exercice 20.

Calculer la somme des séries suivantes.

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4n^2+8n+3} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(n^2-1)^2}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-10}{n^3+7n^2+10n}$$

Fin des cours