Mathématiques

Chapitre B13

Espaces vectoriels euclidiens

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

I. Produit scalaire

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}$$

Définition

Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition (suite)

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (u \,|\, v) \end{aligned}$$

Définition (suite)

$$\begin{aligned}\varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (u,v) &\longmapsto (u\,|\,v)\end{aligned}$$

- **bilinéaire** : $\forall (u,u',v,v') \in E^4 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\lambda u + u'\,|\,v) &= \lambda\,(u\,|\,v) + (u'\,|\,v)\\ (u\,|\,\lambda v + v') &= \lambda\,(u\,|\,v) + (u\,|\,v')\end{aligned}$$

Définition (suite)

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto (u\,|\,v) \end{aligned}$$

- **bilinéaire** : $\forall (u, u', v, v') \in E^4 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\lambda u + u' \,|\, v) &= \lambda\,(u\,|\,v) + (u'\,|\,v) \\ (u \,|\, \lambda v + v') &= \lambda\,(u\,|\,v) + (u\,|\,v') \end{aligned}$$

Définition (suite)

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (u \,|\, v) \end{aligned}$$

- **bilinéaire** : $\forall (u, u', v, v') \in E^4 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\lambda u + u' \,|\, v) &= \lambda \,(u \,|\, v) + (u' \,|\, v) \\ (u \,|\, \lambda v + v') &= \lambda \,(u \,|\, v) + (u \,|\, v') \end{aligned}$$

Définition (suite)

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto (u\,|\,v) \end{aligned}$$

- symétrique :

$$\forall (u,v) \in E^2 \qquad (u\,|\,v) = (v\,|\,u)$$

Définition (suite)

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (u \,|\, v) \end{aligned}$$

- définie positive :

$$\forall u \in E \qquad (u \,|\, u) \geqslant 0$$

$$\text{et} \qquad (u \,|\, u) = 0_{\mathbb{R}} \iff u = 0_E$$

Notations

Produit scalaire de u et v :

$$(u \,|\, v) \qquad \langle u, v \rangle \qquad u \cdot v$$

Exemple 1

$$E = \mathbb{R}^n \qquad \begin{aligned} u &= (x_1, \ldots, x_n) \\ v &= (y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

$$(u \,|\, v) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Exemple 1 (suite)

$$E = \mathbb{R}^3 \qquad \begin{aligned} u &= (x, y, z) \\ v &= (x', y', z') \end{aligned}$$

$$(u \,|\, v) = xx' + yy' + zz'$$

Exemple 2

$$E = \mathbb{R}^3 \qquad \begin{aligned} u &= (x, y, z) \\ v &= (x', y', z') \end{aligned}$$

$$(u \,|\, v) = xx' + 2yy' + 7zz'$$

Exemple 3

$E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

$$(\, f \mid g\,) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

▷ Exercice 1.

Pour tous $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ de $\mathbb{R}^2$ on pose :

$$(u \,|\, v) = 5xx' + xy' + x'y + yy'$$

Démontrer que cette application est un produit scalaire.

▷ Exercice 2.

Soit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des réels distincts fixés.
Démontrer que l'application

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) Q(\alpha_k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Définitions

(i) Espace préhilbertien :

Espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Définitions

(i) Espace préhilbertien :

Espace vectoriel muni d'un produit scalaire

(ii) Espace euclidien :

Espace vectoriel
- réel
- de dimension finie
- muni d'un produit scalaire.

Notation

(E, φ) : espace préhilbertien réel

$$(u \mid v) = \varphi(u, v)$$

Définition

Norme euclidienne de E associée a φ :

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto N(u) = \sqrt{\varphi(u,u)} \end{aligned}$$

Définition

Norme euclidienne de E associée a φ :

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto N(u) = \sqrt{\varphi(u,u)} \end{aligned}$$

Remarque

$\forall u \in E \qquad (u \,|\, u) \geqslant 0$

Donc $N(u) = \sqrt{(u \,|\, u)}$ est bien défini

Définition

Norme euclidienne de E associée a φ :

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto N(u) = \sqrt{\varphi(u,u)} \end{aligned}$$

Notation

$$||u|| = N(u) = \sqrt{(u \,|\, u)}$$

Définition

Norme euclidienne de E associée a φ :

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto N(u) = \sqrt{\varphi(u,u)} \end{aligned}$$

Exemple

$E = \mathbb{R}^2$

$$\forall u = (x,y) \in E \qquad N(u) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Norme associée au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$

Définition

Norme euclidienne de E associée a φ :

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto N(u) = \sqrt{\varphi(u,u)} \end{aligned}$$

Exemple 1 (suite)

$E = \mathbb{R}^n \qquad u = (x_1, \ldots, x_n) \in E$

$$N(u) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Norme associée au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$

Exemple 4

$E = \mathbb{R}$

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4

$E = \mathbb{R}$

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

Norme associée à ce produit scalaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} = |x| \end{array}$$

La valeur absolue est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}$.

Définition

u est **unitaire** si $||u|| = 1$

Exemple 5

$$\forall u \in E \setminus \{0_E\} \qquad \frac{u}{||u||} \text{ est unitaire}$$

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

E : espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

$\forall (u, v) \in E^2$

$$(u \,|\, v)^2 \leqslant (u \,|\, u)\,(v \,|\, v)$$

L'égalité a lieu ssi u et v sont colinéaires.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

E : espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

$\forall (u, v) \in E^2$

$$(u \mid v)^2 \leqslant (u \mid u)\,(v \mid v)$$

L'égalité a lieu ssi u et v sont colinéaires.

Remarque

Ceci équivaut à :

$$|(u \mid v)| \leqslant ||u||\;||v||$$

Remarque

En conséquence :

$$\forall (u,v) \in (E \setminus \{0_E\})^2 \qquad -1 \leqslant \frac{(u \,|\, v)}{||u||||v||} \leqslant 1$$

Ce réel est appelé cosinus du couple (u, v).
Il est invariant par multiplication de u ou de v par un réel strictement positif.

Corollaire - ICS pour les intégrales

Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a, b]$:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,dt \int_a^b g^2(t)\,dt$$

L'égalité a lieu ssi f et g sont proportionnelles.

Corollaire - ICS pour les réels

Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \ \sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

L'égalité a lieu ssi x et y sont proportionnels.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

E : espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
Pour tout u, $v \in E$:

$$(u \,|\, v)^2 \leqslant (u \,|\, u)\,(v \,|\, v)$$

L'égalité a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires.

Démonstration.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

E : espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
Pour tout u, $v \in E$:

$$(u \,|\, v)^2 \leqslant (u \,|\, u)\,(v \,|\, v)$$

L'égalité a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires.

<u>Démonstration</u>.

$\square$

Proposition

Soit $u \mapsto ||u||$ une norme euclidienne sur E.

- $\forall u \in E \quad ||u|| \geqslant 0$

Proposition

Soit $u \mapsto ||u||$ une norme euclidienne sur E.

- $\forall u \in E \quad ||u|| \geqslant 0$
- $\forall u \in E \quad (||u|| = 0 \iff u = 0)$ (Séparation)

Proposition

Soit $u \mapsto ||u||$ une norme euclidienne sur E.

- $\forall u \in E \quad ||u|| \geqslant 0$
- $\forall u \in E \quad (||u|| = 0 \iff u = 0)$ (Séparation)
- $\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad ||\lambda u|| = |\lambda| \, ||u||$ (Homogénéité)

Proposition

Soit $u \mapsto ||u||$ une norme euclidienne sur E.

- $\forall u \in E \quad ||u|| \geqslant 0$
- $\forall u \in E \quad (||u|| = 0 \iff u = 0)$
  (Séparation)
- $\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad ||\lambda u|| = |\lambda| \; ||u||$
  (Homogénéité)
- $\forall (u, v) \in E^2 \quad ||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||$
  (Inégalité triangulaire)

Proposition

Soit $u \mapsto ||u||$ une norme euclidienne sur E.

- $\forall u \in E \quad ||u|| \geqslant 0$
- $\forall u \in E \quad (||u|| = 0 \iff u = 0)$ (Séparation)
- $\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad ||\lambda u|| = |\lambda|\ ||u||$ (Homogénéité)
- $\forall (u,v) \in E^2 \quad ||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||$ (Inégalité triangulaire)

  Avec égalité ssi $u = 0_E$ ou $v = \lambda u$, $\lambda \geqslant 0$.

Remarque

Une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les quatre propriétés ci-dessus est appelée norme de E.
Toutes les normes ne sont pas euclidiennes (*i.e.*, ne proviennent pas d'un produit scalaire).

Démonstration.

- $||u|| = \sqrt{(u \mid u)}$ donc $||u|| \geqslant 0$

Démonstration.

- $||u|| = \sqrt{(u \,|\, u)}$ donc $||u|| \geqslant 0$
- $$\begin{aligned} ||u|| = 0_{\mathbb{R}} &\iff (u \,|\, u) = 0_{\mathbb{R}} \\ &\iff u = 0_E \end{aligned}$$

Démonstration.

- $||u|| = \sqrt{(u \,|\, u)}$ donc $||u|| \geqslant 0$
- $$\begin{aligned} ||u|| = 0_{\mathbb{R}} \quad &\iff \quad (u \,|\, u) = 0_{\mathbb{R}} \\ &\iff \quad u = 0_E \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} ||\lambda u|| &= \sqrt{(\lambda u \,|\, \lambda u)} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \,(u \,|\, u)} \\ &= |\lambda| \, \sqrt{(u \,|\, u)} \\ &= |\lambda| \; ||u|| \end{aligned}$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire.

$$||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||$$

$$\Longleftrightarrow \quad ||u+v||^2 \leqslant (||u|| + ||v||)^2$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned} & ||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v|| \\ \iff \quad & ||u+v||^2 \leqslant (||u|| + ||v||)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 = (u+v \,|\, u+v) & \\ & = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,(u \,|\, v) \\ (||u|| + ||v||)^2 & = ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||.||v|| \end{aligned}$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned} & ||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v|| \\ \iff \quad & ||u+v||^2 \leqslant (||u|| + ||v||)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= (u+v \,|\, u+v) \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,(u \,|\, v) \\ (||u|| + ||v||)^2 &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||.||v|| \end{aligned}$$

ICS : $$||u+v||^2 \leqslant (||u|| + ||v||)^2$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire. (Suite)

Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u\,|\,v)| = ||u||.||v|| \iff u, v \text{ colinéaires}$$

Donc

$$(u\,|\,v) = ||u||.||v|| \iff \begin{array}{l} u, v \text{ colinéaires} \\ \text{et } (u\,|\,v) \geqslant 0 \end{array}$$

Si $v = \lambda u$ alors

$$\begin{aligned} (u\,|\,v) \geqslant 0 &\iff \lambda\,(u\,|\,u) \geqslant 0 \\ &\iff \lambda \geqslant 0 \end{aligned}$$

$\square$

Propositions

Pour tous vecteurs u et v de E :

(i) Formule d'Al-Kashi

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,(u\,|\,v)$$

Propositions

Pour tous vecteurs u et v de E :

(i) Formule d'Al-Kashi

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,(u\,|\,v)$$

(ii) Identité de polarisation

$$(u\,|\,v) = \frac{1}{2}\Big(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\Big)$$

Propositions

Pour tous vecteurs u et v de E :

(ii) Identité de polarisation

$$(u \mid v) = \frac{1}{2}\left(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right)$$

Remarque

Si on connaît une norme euclidienne sur E alors on peut retrouver le produit scalaire dont elle provient.

Remarque

Pour tous vecteurs u et v de E :

(iii) Seconde identité de polarisation

$$(u \mid v) = \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right)$$

(iv) Identité du parallélogramme

$$2(||u||^2 + ||v||^2) = ||u+v||^2 + ||u-v||^2$$

Remarque

Pour tous vecteurs u et v de E :

(iii) Seconde identité de polarisation

$$(u \mid v) = \frac{1}{4}(||u+v||^2 - ||u-v||^2)$$

(iv) Identité du parallélogramme

$$2(||u||^2 + ||v||^2) = ||u+v||^2 + ||u-v||^2$$

▷ Exercice.

Démontrer ces identités.

▷ Exercice 3.

Soit u et v deux vecteurs de E tels que :

$$||u+v|| = 5 \qquad \text{et} \qquad ||u-v|| = 1$$

Ces vecteurs peuvent-ils être orthogonaux ?

Exemple 6

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- Z est *centrée* si $E(Z) = 0$
  Pour toute variable aléatoire X,
  $Z = X - E(X)$ est centrée.

Exemple 6

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- Z est *centrée* si $E(Z) = 0$
  Pour toute variable aléatoire X,
  $Z = X - E(X)$ est centrée.
- L'ensemble des variables aléatoires réelles centrées sur Ω est un espace vectoriel.

Exemple 6

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- L'ensemble des variables aléatoires réelles centrées sur Ω est un espace vectoriel.

Exemple 6

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- L'ensemble des variables aléatoires réelles centrées sur Ω est un espace vectoriel.
- La covariance $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ est un produit scalaire sur cet espace vectoriel.

Exemple 6

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- L'ensemble des variables aléatoires réelles centrées sur Ω est un espace vectoriel.
- La covariance $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ est un produit scalaire sur cet espace vectoriel.
- La norme associée est l'écart-type.

Exemple 6

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- L'ensemble des variables aléatoires réelles centrées sur Ω est un espace vectoriel.
- La covariance $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ est un produit scalaire sur cet espace vectoriel.
- La norme associée est l'écart-type.
- $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$ donc $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1.$

II. Orthogonalité

E : espace vectoriel réel
muni d'un produit scalaire φ

$$(u \,|\, v) = \varphi(u, v)$$

II. Orthogonalité

Définition

u et v sont **orthogonaux** si $(u \mid v) = 0$.

Définition

u et v sont orthogonaux si $(u \mid v) = 0$.

Exemple 7

$$E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}) \qquad (f \mid g) = \int_0^1 fg$$

$$f(t) = 1 \qquad g(t) = t - \frac{1}{2}$$

Alors f et g sont orthogonales.

Définition

F et G sont orthogonaux si

$$\forall (u, v) \in F \times G \qquad (u \,|\, v) = 0$$

Définition

F et G sont orthogonaux si

$$\forall (u, v) \in F \times G \qquad (u \,|\, v) = 0$$

Remarque

Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition

$F \subseteq E$ Orthogonal de F :

$$F^{\perp} = \{v \in E \mid \forall u \in F \ \ (u \,|\, v) = 0\}$$

Définition

$F \subseteq E$ **Orthogonal** de F :

$$F^{\perp} = \{v \in E \mid \forall u \in F \ (u \mid v) = 0\}$$

Remarque

F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux $F \cap F^{\perp} \subseteq \{0_E\}$

Définition

$F \subseteq E$ Orthogonal de F :

$$F^{\perp} = \{v \in E \mid \forall u \in F \ \ (u|v) = 0\}$$

Remarque

F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux $F \cap F^{\perp} \subseteq \{0_E\}$

Exemple 8

$$E^{\perp} = \{0_E\} \qquad \{0_E\}^{\perp} = E$$

Définition

$F \subseteq E$ **Orthogonal** de F :

$$F^\perp = \{v \in E \mid \forall u \in F \ \ (u \,|\, v) = 0\}$$

Propositions

(i) $F \subseteq (F^\perp)^\perp$

Démonstration.

Définition

$F \subseteq E$ **Orthogonal** de F :

$$F^{\perp} = \{v \in E \mid \forall u \in F \ \ (u|v) = 0\}$$

Propositions

(i) $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$

(ii) Si $F \subseteq G$ alors $G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$

Démonstration.

Définition

$F \subseteq E$ **Orthogonal** de F :

$$F^\perp = \{v \in E \mid \forall u \in F \ \ (u|v) = 0\}$$

Propositions

(i) $F \subseteq (F^\perp)^\perp$

(ii) Si $F \subseteq G$ alors $G^\perp \subseteq F^\perp$

(iii) $(\mathrm{Vect}\, F)^\perp = F^\perp$

Démonstration.

Définition

$F \subseteq E$ Orthogonal de F :

$$F^{\perp} = \{v \in E \mid \forall u \in F \ \ (u\,|\,v) = 0\}$$

Propositions

(i) $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$

(ii) Si $F \subseteq G$ alors $G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$

(iii) $(\mathrm{Vect}\, F)^{\perp} = F^{\perp}$

Démonstration.

$\square$

Définition

$F \subseteq E$ Orthogonal de F :

$$F^{\perp} = \{v \in E \mid \forall u \in F \ \ (u|v) = 0\}$$

Propositions

(iii) $(\mathrm{Vect}\, F)^{\perp} = F^{\perp}$

Remarque

Si $F = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B})$ alors $F^{\perp} = \mathscr{B}^{\perp}$.
Un vecteur est orthogonal à F
ssi il est orthogonal à tout élément de $\mathscr{B}$.

Définition

$F \subseteq E$ Orthogonal de F :

$$F^\perp = \{v \in E \mid \forall u \in F \ \ (u \,|\, v) = 0\}$$

Proposition

F partie de $E \implies F^\perp$ sous-espace vectoriel de E

Définition

$F \subseteq E$ Orthogonal de F :

$$F^\perp = \{v \in E \mid \forall u \in F \ \ (u \,|\, v) = 0\}$$

Proposition

F partie de $E \implies F^\perp$ sous-espace vectoriel de E

Démonstration.

Définition

$F \subseteq E$ Orthogonal de F :

$$F^\perp = \{v \in E \mid \forall u \in F \ \ (u \,|\, v) = 0\}$$

Proposition

F partie de $E \implies F^\perp$ sous-espace vectoriel de E

Démonstration.

$\square$

▷ Exercice 4.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que :

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

$$F^{\perp} + G^{\perp} \subseteq (F \cap G)^{\perp}$$

II. Orthogonalité

Définition

Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthogonale si

$$\forall i \neq j \qquad (e_i \,|\, e_j) = 0$$

i.e., les e_i sont deux-à-deux orthogonaux.

Définition

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale si

$$\forall i \neq j \qquad (e_i \,|\, e_j) = 0$$

i.e., les e_i sont deux-à-deux orthogonaux.

Proposition

Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Définition

Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthogonale si

$$\forall i \neq j \qquad (e_i \,|\, e_j) = 0$$

i.e., les e_i sont deux-à-deux orthogonaux.

Proposition

Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Démonstration.

Définition

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale si

$$\forall i \neq j \qquad (e_i \,|\, e_j) = 0$$

i.e., les e_i sont deux-à-deux orthogonaux.

Proposition

Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Démonstration.

$\square$

Théorème de Pythagore

$(e_1, \ldots, e_n)$ famille orthogonale

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\|e_i\right\|^2$$

Théorème de Pythagore

$(e_1, \ldots, e_n)$ famille orthogonale

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} e_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2$$

Exemple 9

$\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonaux :

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$$

Démonstration.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} e_j\right)$$

Démonstration.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} e_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (e_i \mid e_j)$$

Démonstration.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} e_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (e_i \mid e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid e_i)$$

Démonstration.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} e_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (e_i \mid e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid e_i) = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 \qquad \square$$

Définition

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée si

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \qquad (e_i \,|\, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

i.e., les e_i sont deux-à-deux orthogonaux et unitaires.

Remarque

Symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

III. Espaces vectoriels euclidiens

Rappel

Espace euclidien :

Espace vectoriel
- réel
- de dimension finie
- muni d'un produit scalaire.

On note $n = \dim E$

III. Espaces vectoriels euclidiens

Proposition

Une famille orthonormée de n vecteurs est une base de E.

Proposition

Une famille orthonormée de n vecteurs est une base de E.

Démonstration.

Les vecteurs de cette famille sont non-nuls car ils sont de norme 1.

Proposition

Une famille orthonormée de n vecteurs est une base de E.

Démonstration.

Les vecteurs de cette famille sont non-nuls car ils sont de norme 1.

Il forment donc une famille orthogonale de vecteurs non-nuls.

Proposition

Une famille orthonormée de n vecteurs est une base de E.

Démonstration.

Les vecteurs de cette famille sont non-nuls car ils sont de norme 1.

Il forment donc une famille orthogonale de vecteurs non-nuls.

Par propriété cette famille est libre.

Proposition

Une famille orthonormée de n vecteurs est une base de E.

Démonstration.
Les vecteurs de cette famille sont non-nuls car ils sont de norme 1.
Il forment donc une famille orthogonale de vecteurs non-nuls.
Par propriété cette famille est libre.
Elle est libre maximale, donc c'est une base de E. $\square$

Proposition

Tout sous-espace euclidien possède des bases orthonormées.

Démonstration.

Orthonormalisation de Gram-Schmidt. □

Théorème

$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de E

$$\forall u \in E \qquad u = \sum_{i=1}^{n} (u \,|\, e_i)\, e_i$$

Théorème

$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de E

$$\forall u \in E \qquad u = \sum_{i=1}^{n} (u \,|\, e_i)\, e_i$$

Les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$ sont :

$$((u \,|\, e_1), \ldots, (u \,|\, e_n))$$

Théorème

$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E

$$\forall u \in E \qquad u = \sum_{i=1}^{n} (u \,|\, e_i)\, e_i$$

Les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$ sont :

$$((u \,|\, e_1), \dots, (u \,|\, e_n))$$

<u>Démonstration</u>.

Théorème

$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E

$$\forall u \in E \qquad u = \sum_{i=1}^{n} (u \,|\, e_i)\, e_i$$

Les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$ sont :

$$((u \,|\, e_1), \dots, (u \,|\, e_n))$$

<u>Démonstration</u>.

$\square$

▷ Exercice 5.

$E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

$$u_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1) \quad u_2 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2) \quad u_3 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$$

a. Démontrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est orthonormée, et en déduire que c'est une base orthonormée de E.

b. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 1)$ dans cette base.

Proposition

u de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
v de coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
Alors :

$$(u \mid v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \text{et} \qquad ||u|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Proposition

u de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
v de coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
Alors :

$$(u \,|\, v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \text{et} \qquad ||u|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Remarque

On applique les mêmes formules qu'avec le produit scalaire usuel, pourvu que les coordonnées soient exprimées dans une base orthonormée.

Proposition

u de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
v de coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
Alors :

$$(u \,|\, v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \text{et} \qquad ||u|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Démonstration.

$$(u \,|\, v) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right)$$

Proposition

u de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
v de coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
Alors :

$$(u \,|\, v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \text{et} \qquad ||u|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Démonstration.

$$(u \,|\, v) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \,(e_i \,|\, e_j)$$

Proposition

u de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
v de coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
Alors :

$$(u \,|\, v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \text{et} \qquad ||u|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Démonstration.

$$(u \,|\, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \,(e_i \,|\, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,(e_i \,|\, e_i)$$

Proposition

u de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
v de coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
Alors :

$$(u \,|\, v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \text{et} \qquad ||u|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Démonstration.

$$(u \,|\, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,(e_i \,|\, e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Proposition

u de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
v de coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ dans la BON $\mathscr{B}$
Alors :

$$(u \,|\, v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \text{et} \qquad ||u|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Démonstration.

Si $\quad u = v \quad$ alors : $\quad ||u||^2 = (u \,|\, u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \qquad \square$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Jørgen Gram, Danemark, 1850 – 1916

Erhard Schmidt, Allemagne, 1876 – 1959

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exemple 10

$E = \mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,2,0) \qquad u_3 = (2,0,3)$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exemple 10

$E = \mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1, 1, 1) \qquad u_2 = (1, 2, 0) \qquad u_3 = (2, 0, 3)$$

Étape 1. $v_1 = u_1$

$$v_2 = u_2 + \lambda v_1$$

$$v_3 = u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exemple 10

$E = \mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,2,0) \qquad u_3 = (2,0,3)$$

<u>Étape 1</u>. $v_1 = u_1 \qquad = (1,2,2)$

$$v_2 = u_2 + \lambda v_1$$

$$v_3 = u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exemple 10

$E = \mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1, 1, 1) \qquad u_2 = (1, 2, 0) \qquad u_3 = (2, 0, 3)$$

Étape 1.
$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 & &= (1, 2, 2) \\ v_2 &= u_2 + \lambda v_1 \\ v_3 &= u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2 \end{aligned}$$

$$(v_1 \mid v_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exemple 10

$E = \mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1, 1, 1) \qquad u_2 = (1, 2, 0) \qquad u_3 = (2, 0, 3)$$

Étape 1.

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 && = (1, 2, 2) \\ v_2 &= u_2 + \lambda v_1 && = (0, 1, -1) \\ v_3 &= u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2 && \end{aligned}$$

$$(v_1 \mid v_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exemple 10

$E = \mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,2,0) \qquad u_3 = (2,0,3)$$

Étape 1.

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 && = (1,2,2) \\ v_2 &= u_2 + \lambda v_1 && = (0,1,-1) \\ v_3 &= u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2 && \end{aligned}$$

$$(v_1 \mid v_3) = (v_2 \mid v_3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -\tfrac{5}{3} \quad \beta = \tfrac{3}{2}$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exemple 10

$E = \mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,2,0) \qquad u_3 = (2,0,3)$$

Étape 1.

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 &&= (1,2,2) \\ v_2 &= u_2 + \lambda v_1 &&= (0,1,-1) \\ v_3 &= u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2 &&= \tfrac{1}{6}(2,-1,-1) \end{aligned}$$

$$(v_1 \mid v_3) = (v_2 \mid v_3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -\frac{5}{3} \quad \beta = \frac{3}{2}$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exemple 10

$E = \mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,2,0) \qquad u_3 = (2,0,3)$$

Étape 1.
$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 &&= (1,2,2) \\ v_2 &= u_2 + \lambda v_1 &&= (0,1,-1) \\ v_3 &= u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2 &&= \frac{1}{6}(2,-1,-1) \end{aligned}$$

Étape 2. $\forall i = 1,2,3 \qquad \varepsilon_i = \frac{v_i}{||v_i||}$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exemple 10

$E = \mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,2,0) \qquad u_3 = (2,0,3)$$

Étape 2. $\forall i = 1,2,3 \qquad \varepsilon_i = \dfrac{v_i}{||v_i||}$

$$v_1 = (1,1,1) \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$v_2 = (0,1,-1) \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$$

$$v_3 = \frac{1}{6}(2,-1,-1) \qquad \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

▷ Exercice 6.

Orthonormaliser la base (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$ où :

$$u_1 = (1, 1) \qquad \text{et} \qquad u_2 = (1, 2)$$

▷ Exercice 7.

Même question avec la base de $\mathbb{R}^3$ composée de :

$$u_1 = (1, 1, -1) \quad u_2 = (1, -1, 1) \quad u_3 = (-1, 1, 1)$$

Théorème

$(u_1, \ldots, u_p)$ famille libre.
Alors il existe une famille orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ d'éléments de E telle que pour tout $k = 1 \ldots p$:

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$$

<u>Démonstration</u>. Récurrence finie sur $m \in \{1, \ldots, p\}$

Initialisation. $\varepsilon_1 = \dfrac{u_1}{||u_1||}$

Hérédité. $v_2 = u_2 + \alpha_1 \varepsilon_1$

$$\begin{aligned}
(v_2 \,|\, \varepsilon_1) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (u_2 \,|\, \varepsilon_1) + \alpha_1 (\varepsilon_1 \,|\, \varepsilon_1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = -(u_2 \,|\, \varepsilon_1)
\end{aligned}$$

$\varepsilon_2 = \dfrac{v_2}{||v_2||}$

...

$\square$

Corollaire

Tout espace euclidien possède des bases orthonormées.

Démonstration. Tout espace vectoriel de dimension finie possède des bases.
Il suffit d'en choisir une et de l'orthonormaliser. $\square$

III. Espaces vectoriels euclidiens

n

Proposition

F sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E

$$F \oplus F^{\perp} = E$$

Proposition

F sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E

$$F \oplus F^{\perp} = E$$

Définition

$F^{\perp}$ est appelé supplémentaire orthogonal de F.

Proposition

F sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E

$$F \oplus F^{\perp} = E$$

Définition

$F^{\perp}$ est appelé supplémentaire orthogonal de F.

Démonstration.

Proposition

F sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E

$$F \oplus F^{\perp} = E$$

Définition

$F^{\perp}$ est appelé supplémentaire orthogonal de F.

Démonstration.

$\square$

Proposition

F sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E

$$F \oplus F^\perp = E$$

Corollaire

(i) $\dim F^\perp = n - \dim F$

Proposition

F sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E

$$F \oplus F^{\perp} = E$$

Corollaire

(i) $\dim F^{\perp} = n - \dim F$

(ii) $(F^{\perp})^{\perp} = F$

Corollaire

(i) $\dim F^{\perp} = n - \dim F$

(ii) $(F^{\perp})^{\perp} = F$

Démonstration.

(ii) $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$

Corollaire

(i) $\dim F^{\perp} = n - \dim F$

(ii) $(F^{\perp})^{\perp} = F$

<u>Démonstration</u>.

(ii) $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$

$$\begin{aligned}\dim (F^{\perp})^{\perp} &= n - \dim F^{\perp} \\ &= n - (n - \dim F) = \dim F\end{aligned}$$

Corollaire

(i) $\dim F^{\perp} = n - \dim F$

(ii) $(F^{\perp})^{\perp} = F$

Démonstration.

(ii) $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$

$$\begin{aligned}\dim (F^{\perp})^{\perp} &= n - \dim F^{\perp} \\ &= n - (n - \dim F) = \dim F\end{aligned}$$

Par théorème : $(F^{\perp})^{\perp} = F$ $\square$

▷ Exercice 4.

Démontrer que pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E :

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

$$F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$$

▷ Exercice 8.

Démontrer que l'inclusion de l'exercice 4 est une égalité si E est euclidien.

III. Espaces vectoriels euclidiens

D. Projecteurs orthogonaux

Définition

F sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E

Projecteur orthogonal de E sur F :

projecteur de E sur F parallèlement à $F^\perp$

D. Projecteurs orthogonaux

Définition

F sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E

Projecteur orthogonal de E sur F :

projecteur de E sur F parallèlement à $F^\perp$

Remarque

$$\forall u \in F \qquad u - p(u) \in F^\perp$$

Proposition

$(e_1, \ldots, e_m)$ base orthonormée de F

$$\forall u \in E \qquad p(u) = \sum_{k=1}^{m} (u \,|\, e_k)\, e_k$$

Proposition

$(e_1, \ldots, e_m)$ base orthonormée de F

$$\forall u \in E \qquad p(u) = \sum_{k=1}^{m} (u \,|\, e_k)\, e_k$$

Démonstration.

$$v = \sum_{k=1}^{m} (u \,|\, e_k)\, e_k \qquad w = u - v$$

Alors $v \in F$ et $w \in F^{\perp}$ donc $v = p(u)$. $\square$

Remarque

Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une BON de F,
$(e_{m+1}, \dots, e_n)$ une BON de $F^\perp$.

Alors $(e_1, \dots\dots\dots, e_n)$ est une BON de E.

Remarque

Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une BON de F,
$(e_{m+1}, \dots, e_n)$ une BON de $F^\perp$.

Alors $(e_1, \dots\dots\dots, e_n)$ est une BON de E.

Pour tout $u \in E$:

$$\begin{aligned} u = (u \,|\, e_1)\, e_1 + \cdots + (u \,|\, e_m)\, e_m \\ + (u \,|\, e_{m+1})\, e_{m+1} + \cdots + (u \,|\, e_n)\, e_n. \end{aligned}$$

Remarque

Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une BON de F,
$(e_{m+1}, \dots, e_n)$ une BON de $F^\perp$.

Alors $(e_1, \dots\dots\dots, e_n)$ est une BON de E.

Pour tout $u \in E$:

$$p(u) = (u \,|\, e_1)\, e_1 + \cdots + (u \,|\, e_m)\, e_m$$

Remarque

Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une BON de F,
$(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ une BON de $F^\perp$.

Alors $(e_1, \ldots\ldots\ldots, e_n)$ est une BON de E.

Pour tout $u \in E$:

$$p(u) = (u \,|\, e_1)\, e_1 + \cdots + (u \,|\, e_m)\, e_m$$

On retrouve la formule pour $p(u)$.

Théorème

Soit p le projecteur orthogonal de E sur F.

(i) $\forall u \in E \qquad ||p(u)|| \leqslant ||u||$

Théorème

Soit p le projecteur orthogonal de E sur F.

(i) $\forall u \in E \qquad ||p(u)|| \leqslant ||u||$

(ii) $p(u)$ est l'unique vecteur u_0 de F tel que :

$$||u - u_0|| = \underset{v \in F}{\mathrm{Min}} \, ||u - v||$$

Théorème

Soit p le projecteur orthogonal de E sur F.

(i) $\forall u \in E \qquad ||p(u)|| \leqslant ||u||$

(ii) $p(u)$ est l'unique vecteur u_0 de F tel que :

$$||u - u_0|| = \operatorname*{Min}_{v \in F} ||u - v||$$

Définition

Distance de u à F :

$$d(u, F) = \operatorname*{Min}_{v \in F} ||u - v||$$

Définition

Distance de u à F :

$$d(u, F) = \underset{v \in F}{\mathrm{Min}} \, ||u - v||$$

Remarque

Ainsi, la distance de u à F est la distance de u à $p(u)$.

Démonstration.

(i) $u - p(u)$ et $p(u)$ sont orthogonaux.

Théorème de Pythagore :

$$||u||^2 = ||u - p(u)||^2 + ||p(u)||^2$$

Donc $$||p(u)||^2 \leqslant ||u||^2$$

Puis $$||p(u)|| \leqslant ||u||$$

Démonstration.

(ii) $\forall v \in F \qquad u - v = \underbrace{(u - p(u))}_{\in F^{\perp}} + \underbrace{(p(u) - v)}_{\in F}$

Démonstration.

(ii) $\forall v \in F \qquad u - v = \underbrace{(u - p(u))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(p(u) - v)}_{\in F}$

Théorème de Pythagore :

$$||u - p(u)|| \leqslant ||u - v||$$

Démonstration.

(ii) $\forall v \in F \qquad u - v = \underbrace{(u - p(u))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(p(u) - v)}_{\in F}$

Théorème de Pythagore :

$$||u - p(u)|| \leqslant ||u - v||$$

Donc $\qquad ||u - p(u)|| \leqslant \operatorname*{Inf}_{v \in F} ||u - v||$

Comme $p(u)$ est l'un des éléments de F :

$$||u - p(u)|| = \operatorname*{Min}_{v \in F} ||u - v||$$

Démonstration.

(ii) $\forall v \in F \qquad u - v = \underbrace{(u - p(u))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(p(u) - v)}_{\in F}$

Théorème de Pythagore :

$$||u - p(u)|| \leqslant ||u - v||$$

Si $v \in F$ est différent de $p(u)$:

$$||u - p(u)|| < ||u - v||$$

D'où l'unicité. $\square$

Remarque

Soit E un $\mathbb{R}$-ev préhilbertien,
F un sev de E de dimension finie m.

Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de F et :

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto \sum_{k=1}^{m} (u \,|\, e_k)\, e_k \end{aligned}$$

Alors p est un projecteur de E et le théorème ci-dessus est toujours valable.

Exemple 11

$E = \mathbb{R}^3$ $\quad F = \mathrm{Vect}\,(u_1)$ $\quad u_1 = (1, 2, 2)$

p : projecteur orthogonal de E sur F

Calculer :

a. la matrice de p dans la base canonique

Exemple 11

$E = \mathbb{R}^3 \qquad F = \mathrm{Vect}\,(u_1) \qquad u_1 = (1, 2, 2)$

p : projecteur orthogonal de E sur F

Calculer :

a. la matrice de p dans la base canonique

b. la distance de $v = (6, 5, 4)$ à F

Exemple 11

$E = \mathbb{R}^3$ $\qquad F = \mathrm{Vect}\,(u_1)$ $\qquad u_1 = (1, 2, 2)$

p : projecteur orthogonal de E sur F

Calculer :

a. la matrice de p dans la base canonique

b. la distance de $v = (6, 5, 4)$ à F

c. la matrice de q dans la base canonique
où q est le projecteur orthogonal de E sur $F^{\perp}$.

▷ Exercice 9.

(Suite de l'exercice 6) Soit $f = \mathrm{Vect}\,(u_1)$.

a. Calculer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F.

b. Quelle est la distance de $v = (13, 3)$ à F ?

▷ Exercice 10.

(Suite de l'exercice 7) Soit $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$.

a. Calculer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F.

b. En déduire la matrice dans la base canonique de la symétrie de E par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

▷ Exercice 11.

$E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in E^2 \qquad (f \mid g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

$F = \mathrm{Vect}\,(g_0, g_1, g_2)$ où $g_k(x) = x^k$

a. Orthonormaliser la base (g_0, g_1, g_2) de F.

b. Calculer le projeté orthogonal de la fonction exponentielle sur F, et la distance de $\exp$ à F.

▷ Exercice 11. Réponse :

On obtient

$$f(x) = 30(7e - 19)x^2 + 12(49 - 18e)x + 3(13e - 35)$$

▷ Exercice 11. Réponse :

On obtient

$$f(x) = 30(7e - 19)x^2 + 12(49 - 18e)x + 3(13e - 35)$$

$$\forall x \in [0,1] \qquad -0{,}013 \leqslant e^x - f(x) \leqslant 0{,}015$$

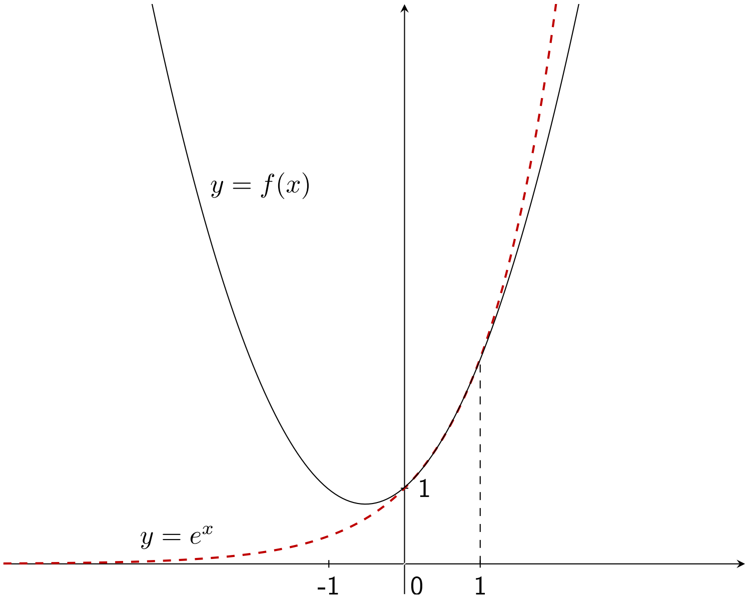
▷ Exercice 11. Réponse :

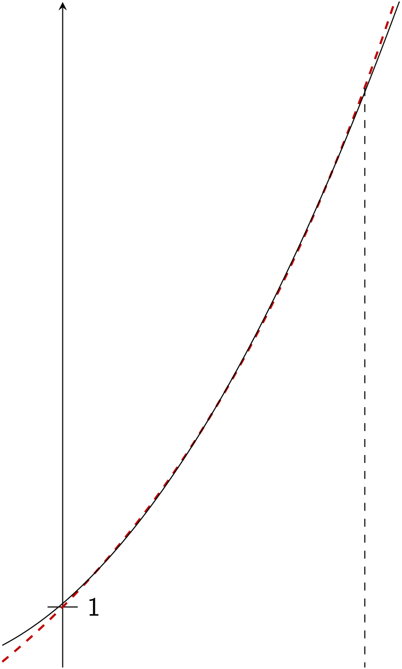
On obtient

$$f(x) = 30(7e-19)x^2 + 12(49-18e)x + 3(13e-35)$$

$$\forall x \in [0,1] \qquad -0{,}013 \leqslant e^x - f(x) \leqslant 0{,}015$$

$$d(\exp, f) = ||\exp - f|| = \left(\int_0^1 (e^x - f(x))^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0{,}0053$$


$y = f(x)$
$y = e^x$
1
-1
0
1


1

Prochain chapitre

Chapitre A13

Fonctions de deux variables