

Mathématiques

Chapitre B12
Déterminants

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

Chapitre B12. Déterminants

I. Déterminant d'une matrice

Chapitre B12. Déterminants

I. Déterminant d'une matrice

II. Groupe symétrique

Chapitre B12. Déterminants

I. Déterminant d'une matrice

II. Groupe symétrique

III. Multilinéarité

Chapitre B12. Déterminants

- I. Déterminant d'une matrice
- II. Groupe symétrique
- III. Multilinéarité
- IV. Déterminant en base quelconque

Chapitre B12. Déterminants

I. Déterminant d'une matrice

II. Groupe symétrique

III. Multilinéarité

IV. Déterminant en base quelconque

V. Applications

- ▶ Jérôme Cardan (Italie, 1501 – 1576)
- ▶ Gottfried Leibniz (Allemagne, 1646 – 1716) et Seki Kowa (Japon, 1642 – 1708)
- ▶ Colin McLaurin (Écosse, 1698 – 1746)
- ▶ Gabriel Cramer (Suisse 1704 – 1752)
- ▶ Etienne Bézout (France, 1730 – 1783), Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 – 1796)
- ▶ Pierre-Simon de Laplace (France 1749 – 1827)
- ▶ Joseph-Louis Lagrange (Italie 1736 – 1813)
- ▶ Carl-Friedrich Gauss (Allemagne, 1777 – 1855)
- ▶ Augustin Louis Cauchy (France, 1789 – 1857)

► $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

► $n \in \mathbb{N}^*$

Chapitre B12. Déterminants

I. Déterminant d'une matrice

- A. Définition
- B. Propriétés
- C. Calculs de déterminants

II. Groupe symétrique

III. Multilinéarité

IV. Déterminant en base quelconque

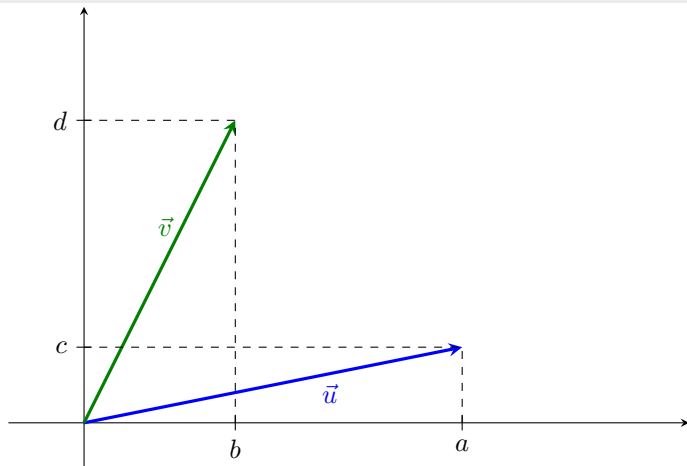
V. Applications

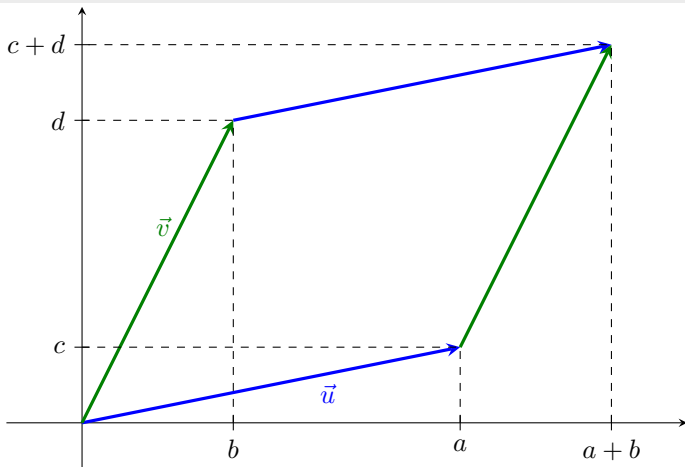
I. Déterminant d'une matrice

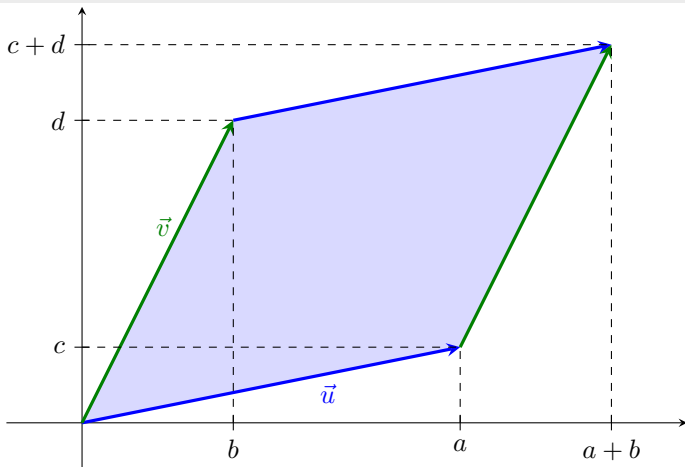
A. Définition

B. Propriétés

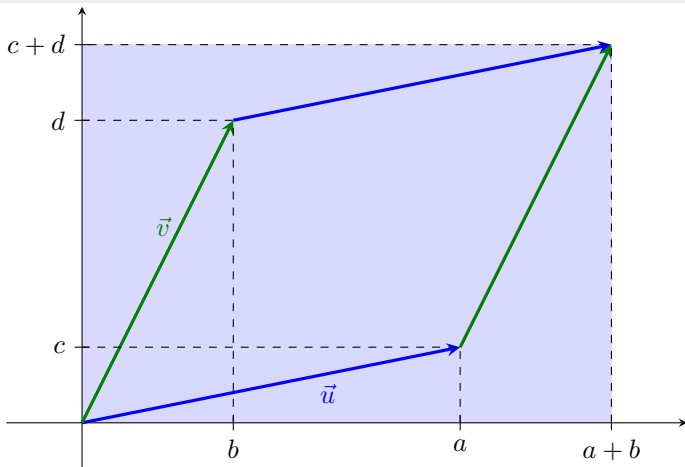
C. Calculs de déterminants



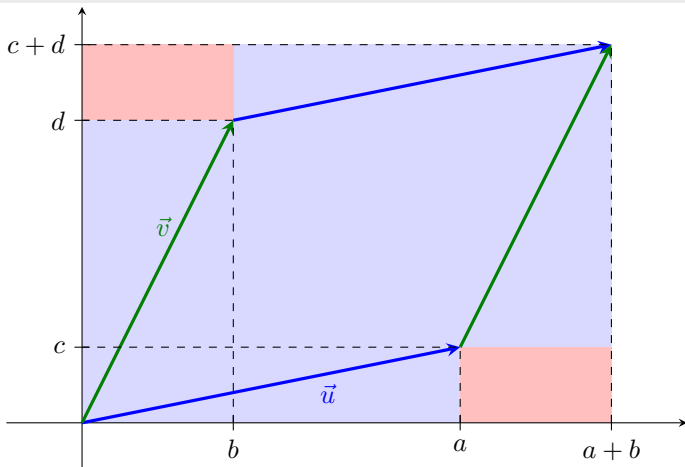




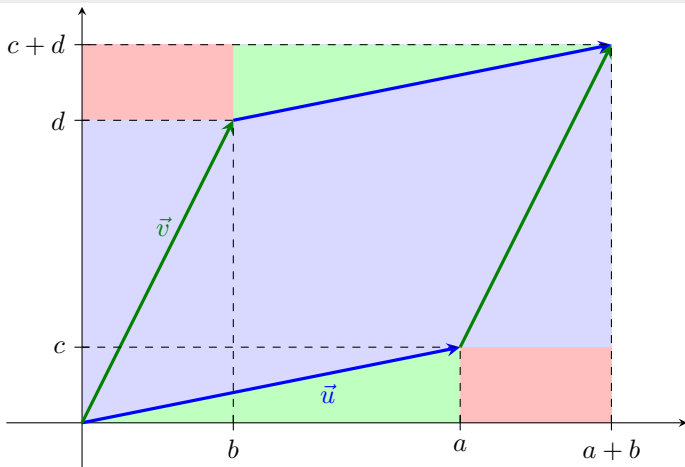
$$S = ?$$



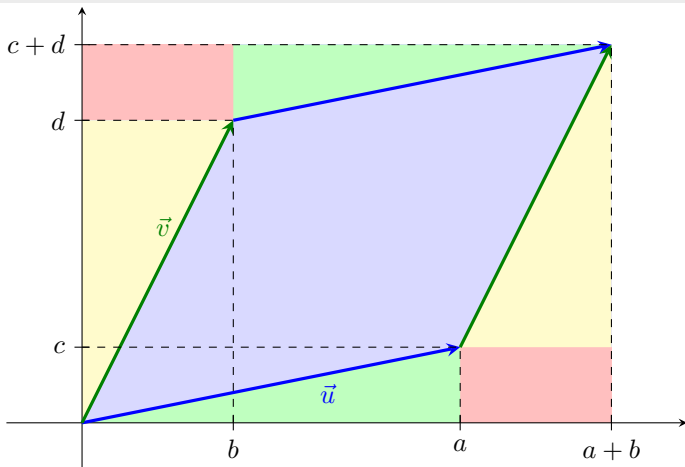
$$S = (a + b)(c + d)$$



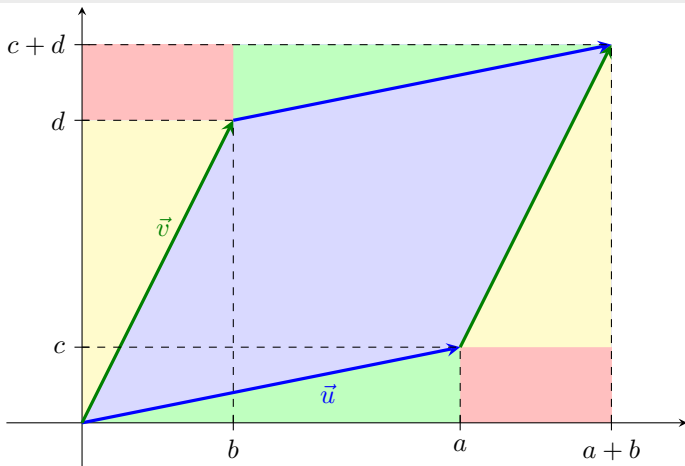
$$S = (a + b)(c + d) - 2bc$$



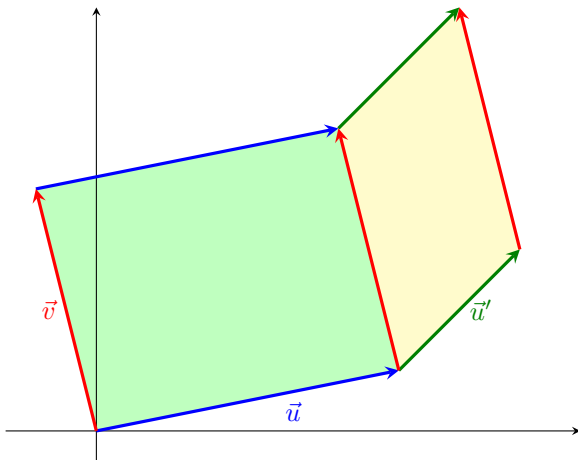
$$S = (a + b)(c + d) - 2bc - ac$$



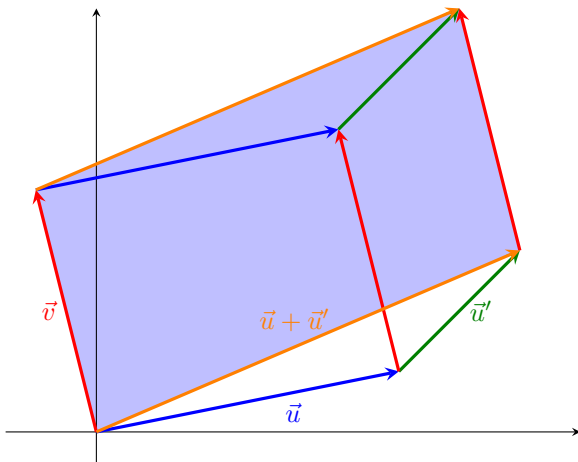
$$S = (a + b)(c + d) - 2bc - ac - bd$$



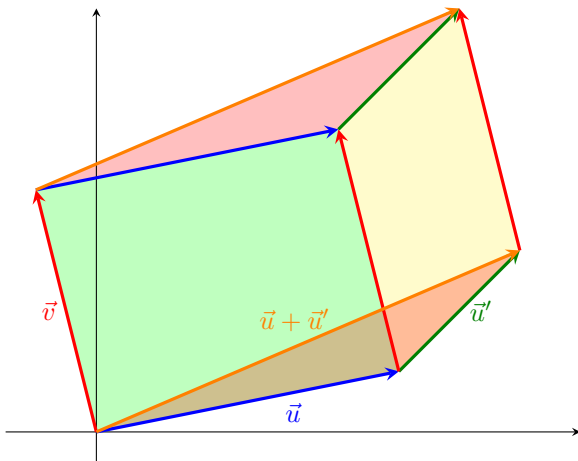
$$\begin{aligned}
 S &= (a+b)(c+d) - 2bc - ac - bd \\
 &= ac + ad + bc + bd - 2bc - ac - bd = ad - bc
 \end{aligned}$$



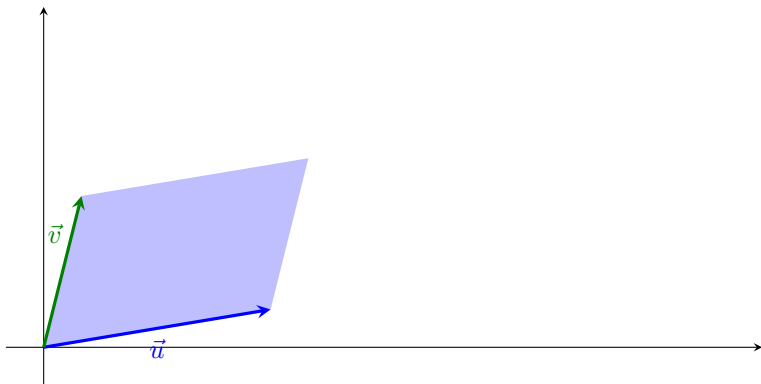
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}', \vec{v})$$

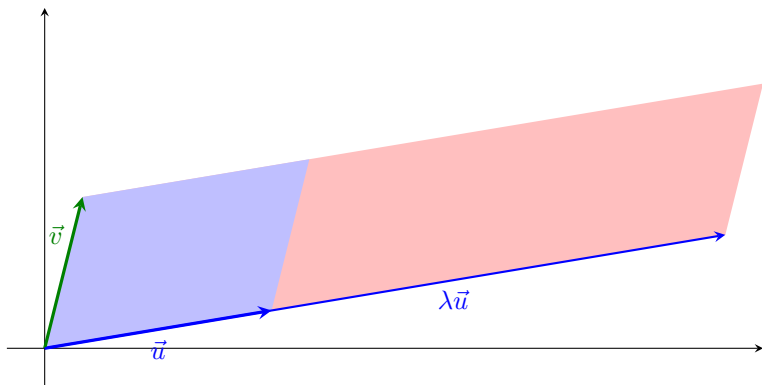


$$\det(\vec{u} + \vec{u}', \vec{v})$$

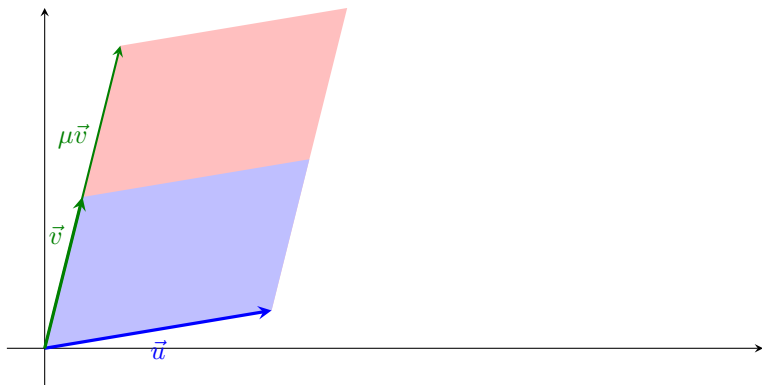


$$\det(\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}', \vec{v})$$

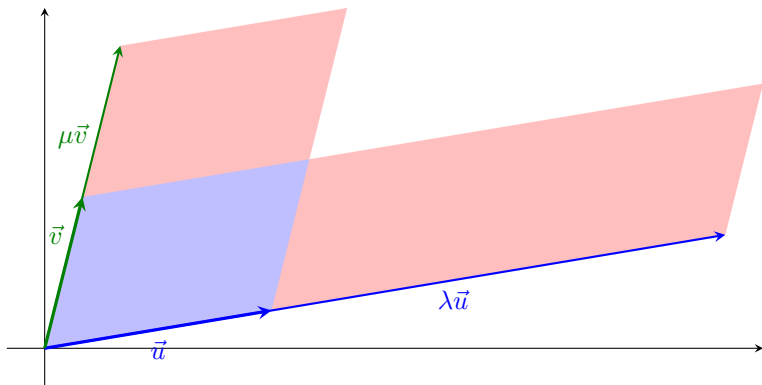




$$\det(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v})$$

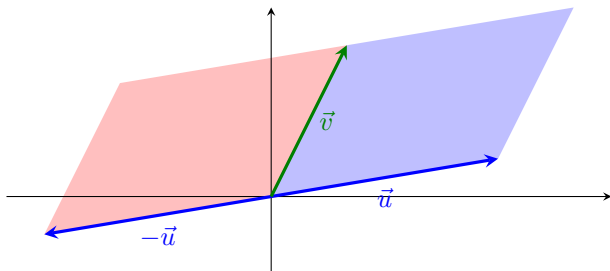


$$\det(\vec{u}, \mu\vec{v}) = \mu \det(\vec{u}, \vec{v})$$

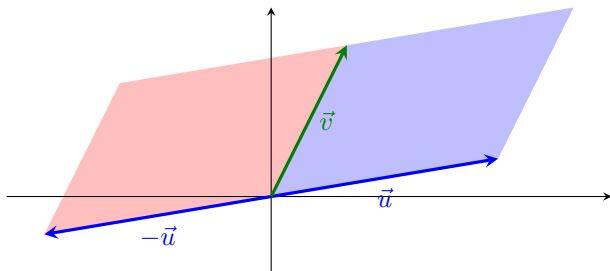


$$\det(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\det(\vec{u}, \mu\vec{v}) = \mu \det(\vec{u}, \vec{v})$$

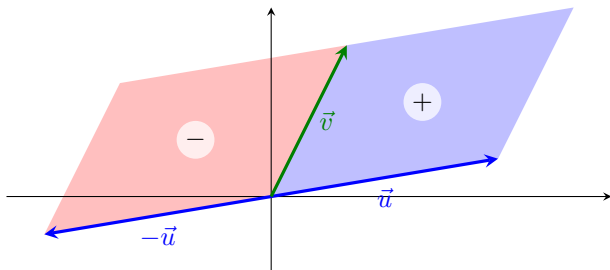


$$\det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(-\vec{u}, \vec{v}) = \det(\vec{0}, \vec{v}) = 0$$



$$\det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(-\vec{u}, \vec{v}) = \det(\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

$$\det(-\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$$



$$\det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(-\vec{u}, \vec{v}) = \det(\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

$$\det(-\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \quad \det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \quad \det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$

Bilinéarité :

$$\begin{aligned} \det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) &= \det(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}) + \det(\vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) \\ &= \det(\vec{u}, \vec{u}) + \det(\vec{u}, \vec{v}) \\ &\quad + \det(\vec{v}, \vec{u}) + \det(\vec{v}, \vec{v}) \end{aligned}$$

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \quad \det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$

Bilinéarité :

$$\begin{aligned} \det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) &= \det(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}) + \det(\vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) \\ &= \det(\vec{u}, \vec{u}) + \det(\vec{u}, \vec{v}) \\ &\quad + \det(\vec{v}, \vec{u}) + \det(\vec{v}, \vec{v}) \end{aligned}$$

donc
$$0 = \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{v}, \vec{u})$$

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \quad \det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$

Bilinéarité :

$$\begin{aligned} \det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) &= \det(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}) + \det(\vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) \\ &= \det(\vec{u}, \vec{u}) + \det(\vec{u}, \vec{v}) \\ &\quad + \det(\vec{v}, \vec{u}) + \det(\vec{v}, \vec{v}) \end{aligned}$$

donc
$$0 = \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{v}, \vec{u})$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$$

Lemme

Il existe une et une seule application

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

telle que :

- (i) f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable
- (ii) f est antisymétrique par rapport à chacune de ses colonnes
- (iii) $f(I_n) = 1$

Lemme

Il existe une et une seule application

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

telle que :

- (i) f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable
- (ii) f est antisymétrique par rapport à chacune de ses colonnes
- (iii) $f(I_n) = 1$

Démonstration. Plus tard.



Définition

On note

$$\det A = f(A)$$

et on appelle **déterminant** de A ce scalaire.

Notation

Si
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

alors
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Définition

$u_1, \dots, u_n$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$:

Le **déterminant de la famille** $(u_1, \dots, u_n)$ est le déterminant de la matrice dont ils forment les colonnes.

Notation

$$\det(u_1, \dots, u_n)$$

Remarque

Le déterminant n'est défini que pour

- ▶ une matrice carrée
- ▶ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$

Remarque

Le déterminant n'est défini que pour

- ▶ une matrice carrée
- ▶ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$
- ▶ un endomorphisme
- ▶ une famille de n vecteurs d'un ev de dimension n .

Remarque

Le déterminant n'est défini que pour

- ▶ une matrice carrée
- ▶ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$
- ▶ un endomorphisme
- ▶ une famille de n vecteurs d'un ev de dimension n .

Un déterminant est toujours carré.

I. Déterminant d'une matrice

A. Définition

B. Propriétés

C. Calculs de déterminants

Notation

$$A = (C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_n)$$

Lemme

Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle est nul.

Démonstration. Ceci est conséquence de la linéarité par rapport à chaque colonnes. □

Proposition

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Démonstration. Par antisymétrie :

$$\begin{aligned} & \det A \\ = & \det(C_1 \cdots C_{i_1} \cdots C_{i_2} \cdots C_n) \\ = & - \det(C_1 \cdots C_{i_2} \cdots C_{i_1} \cdots C_n) \\ = & - \det A \end{aligned}$$

$$\implies \det A = 0$$



Proposition

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\det(\lambda A) &= \det(\lambda C_1 \cdots \lambda C_n) \\ &= \lambda^n \det(C_1 \cdots C_n) \\ &= \lambda^n \det A\end{aligned}$$



Remarque

$$\det(-A) = (-1)^n \det A$$

Rappel

$$T_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Rappel

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Rappel

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & \dots & \\ & & & & 1 & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & & & & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition

Pour toute matrice A

$$\det AT_{ji}(\alpha) = \det A$$

$$\det AD_i(\lambda) = \lambda \det A$$

$$\det AP_{ij} = -\det A$$

Démonstration.

$$AT_{ji}(\alpha) = (C_1 \cdots C_i + \alpha C_j \cdots C_j \cdots C_n)$$

$$\begin{aligned}\det(AT_{ji}(\alpha)) &= \det(C_1 \cdots C_i \cdots C_j \cdots C_n) \\ &\quad + \alpha \det(C_1 \cdots C_j \cdots C_j \cdots C_n) \\ &= \det(C_1 \cdots C_i \cdots C_j \cdots C_n) \\ &= \det A\end{aligned}$$

Démonstration.

$$AD_i(\lambda) = (C_1 \cdots \lambda C_i \cdots C_n)$$

$$\begin{aligned}\det(AD_i(\lambda)) &= \lambda \det(C_1 \cdots C_i \cdots C_n) \\ &= \lambda \det A\end{aligned}$$

Démonstration.

$$AP_{ij} = (C_1 \cdots C_j \cdots C_i \cdots C_n)$$

$$\begin{aligned} \det(AP_{ij}) &= -\det(C_1 \cdots C_i \cdots C_j \cdots C_n) \\ &= -\det A \end{aligned}$$



Corollaire

- ▶ $(C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j)$ ne modifie pas le déterminant
- ▶ $(C_i \leftarrow \lambda C_i)$ multiplie le déterminant par λ
- ▶ $(C_i \leftrightarrow C_j)$ change le signe du déterminant.

Exemple 1

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix}$$

Lemme

Si A n'est pas inversible alors $\det A = 0$.

Lemme

Si A n'est pas inversible alors $\det A = 0$.

Démonstration.

Si A n'est pas inversible alors l'une de ses colonnes est combinaison linéaire des autres.

Lemme

Si A n'est pas inversible alors $\det A = 0$.

Démonstration.

Si A n'est pas inversible alors l'une de ses colonnes est combinaison linéaire des autres.



Proposition

$$\det AB = \det A \det B$$

Proposition

$$\det AB = \det A \det B$$

Démonstration. Si B est une matrice élémentaire :

$$\det T_{ij}(\alpha) = 1 \qquad \det D_i(\lambda) = \lambda \qquad \det P_{ij} = -1$$

Donc $\det(AB) = \det A \det B$.

Proposition

$$\det AB = \det A \det B$$

Démonstration. Si B est une matrice inversible :

$$\begin{aligned}\det AB &= \det(AE_1 \cdots E_m) \\ &= \det A \times \det E_1 \times \cdots \times \det E_m \\ &= \det A \det B\end{aligned}$$

Proposition

$$\det AB = \det A \det B$$

Démonstration. Si B n'est pas inversible, alors AB n'est pas inversible, car :

$$\ker B \subseteq \ker AB$$

Donc $\det AB = \det A \det B = 0$.



▷ Exercice 1.

Vérifier le théorème avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0$$

Dans ce cas :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Proposition

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0$$

Dans ce cas :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Démonstration.

$$\det A \times \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1 \quad \square$$

Corollaire

$(u_1 \dots u_n)$ famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$

$$(u_1 \dots u_n) \text{ base de } \mathbb{K}^n \iff \det(u_1 \dots u_n) \neq 0$$

Exemple 2

$$u_1 = (5, 7) \quad \text{et} \quad u_2 = (9, 4)$$

Proposition

$$\det {}^tA = \det A$$

Remarque

En conséquence les opérations élémentaires sur les lignes ont le même effet sur le déterminant que celles sur les colonnes.

Démonstration.

$$\det A = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \det {}^t A = 0$$

Suite de la démonstration.

Si $\det A \neq 0$:

$$\det {}^tA = \det {}^t(E_1 \cdots E_m)$$

Suite de la démonstration.

Si $\det A \neq 0$:

$$\begin{aligned}\det {}^tA &= \det {}^t(E_1 \cdots E_m) \\ &= \det({}^tE_m \cdots {}^tE_1)\end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

Si $\det A \neq 0$:

$$\begin{aligned}\det {}^tA &= \det {}^t(E_1 \cdots E_m) \\ &= \det({}^tE_m \cdots {}^tE_1) \\ &= (\det {}^tE_m) \cdots (\det {}^tE_1)\end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

Si $\det A \neq 0$:

$$\begin{aligned}\det {}^tA &= \det {}^t(E_1 \cdots E_m) \\ &= \det({}^tE_m \cdots {}^tE_1) \\ &= (\det {}^tE_m) \cdots (\det {}^tE_1) \\ &= (\det E_m) \cdots (\det E_1)\end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

Si $\det A \neq 0$:

$$\begin{aligned}\det {}^tA &= \det {}^t(E_1 \cdots E_m) \\ &= \det({}^tE_m \cdots {}^tE_1) \\ &= (\det {}^tE_m) \cdots (\det {}^tE_1) \\ &= (\det E_m) \cdots (\det E_1) \\ &= (\det E_1) \cdots (\det E_m)\end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

Si $\det A \neq 0$:

$$\begin{aligned}\det {}^tA &= \det {}^t(E_1 \cdots E_m) \\ &= \det({}^tE_m \cdots {}^tE_1) \\ &= (\det {}^tE_m) \cdots (\det {}^tE_1) \\ &= (\det E_m) \cdots (\det E_1) \\ &= (\det E_1) \cdots (\det E_m) \\ &= \det(E_1 \cdots E_m) \\ &= \det A\end{aligned}$$



Remarque

Il n'existe aucune formule pour :

$$\det(A + B)$$

Remarque

Il n'existe aucune formule pour :

$$\det(A + B) = ?$$

I. Déterminant d'une matrice

A. Définition

B. Propriétés

C. Calculs de déterminants

Proposition

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients de sa diagonale.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Démonstration. Si les λ_i sont non-nuls :

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \begin{vmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n
 \end{aligned}$$

Suite de la démonstration. Si l'un des λ_i est nul :

L'une des colonnes est combinaison linéaire des autres, donc $\det T = 0$. □

Règle de l'alpha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Règle de l'alpha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Démonstration.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Règle de l'alpha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Démonstration.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

Règle de l'alpha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & b \end{vmatrix} \\ &= ad - bc \end{aligned}$$



Règle de l'alpha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Autre démonstration.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - bc \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad - bc \quad \square \end{aligned}$$

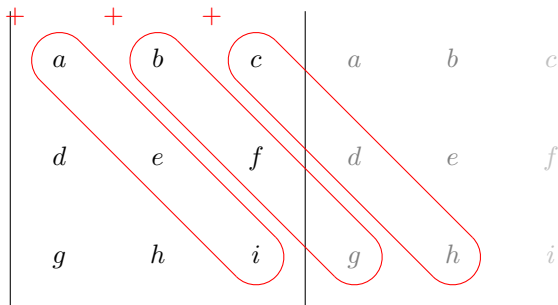
Règle de Sarrus

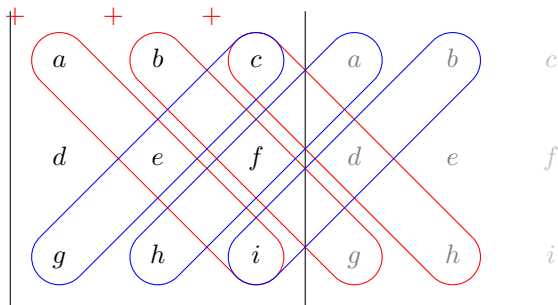
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$
$$=$$

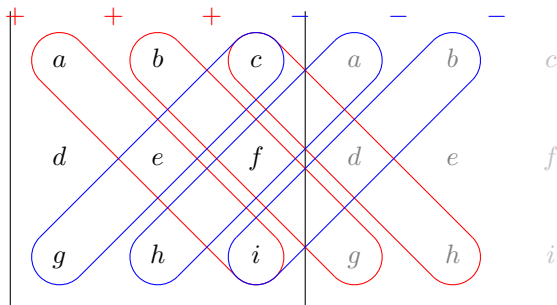
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

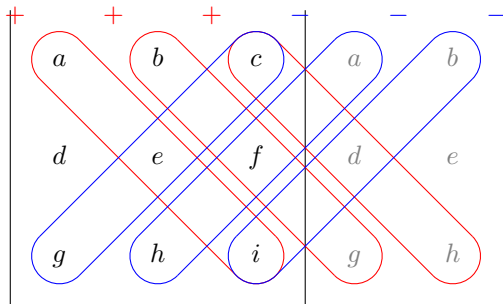




$$= aei + bfg + cdh$$



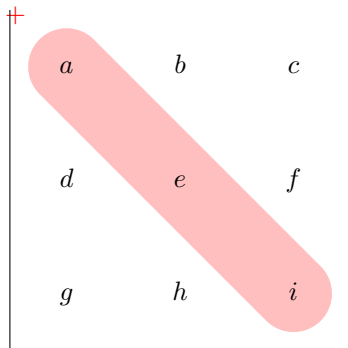
$$= \textcolor{red}{aei} + \textcolor{red}{bfg} + \textcolor{red}{cdh} - \textcolor{blue}{ceg} - \textcolor{blue}{afh} - \textcolor{blue}{bdi}$$



$$= \textcolor{red}{aei} + \textcolor{red}{bfg} + \textcolor{red}{cdh} - \textcolor{blue}{ceg} - \textcolor{blue}{afh} - \textcolor{blue}{bdi}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

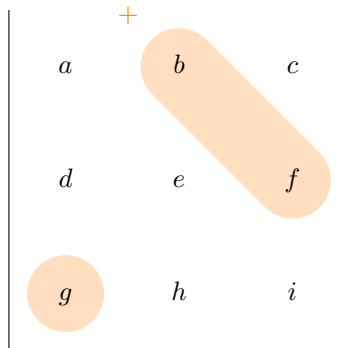
$$=$$



A 3x3 matrix is shown with elements a, b, c in the first row, d, e, f in the second row, and g, h, i in the third row. A red shaded diagonal highlights the elements a, e, i from the top-left to the bottom-right. A red plus sign is located at the top-left corner of the matrix.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

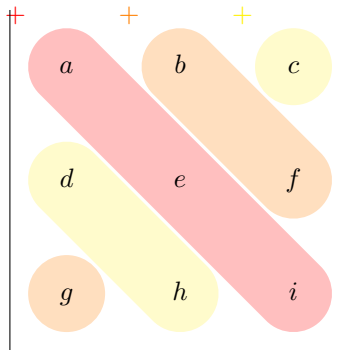
$$= aei$$


$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= aei + bfg$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= aei + bfg + cdh$$



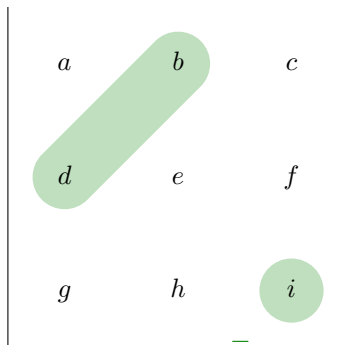
$$= \textcolor{red}{aei} + \textcolor{orange}{bfg} + \textcolor{yellow}{cdh}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

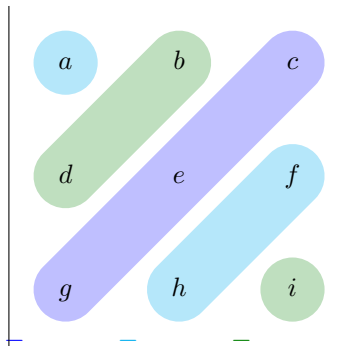
$$= aei + bfg + cdh - ceg$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} -$$

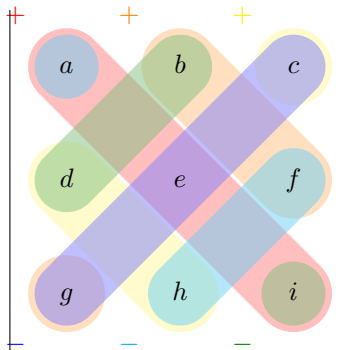
$$= aei + bfg + cdh - ceg - afh$$


$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$



$$= \textcolor{blue}{a} \textcolor{green}{e} \textcolor{blue}{i} + \textcolor{green}{b} \textcolor{blue}{f} \textcolor{green}{g} + \textcolor{purple}{c} \textcolor{blue}{d} \textcolor{green}{h} - \textcolor{green}{c} \textcolor{blue}{e} \textcolor{green}{g} - \textcolor{blue}{a} \textcolor{green}{f} \textcolor{blue}{h} - \textcolor{green}{b} \textcolor{blue}{d} \textcolor{green}{i}$$



$$= \textcolor{red}{a} \textcolor{red}{e} \textcolor{red}{i} + \textcolor{orange}{b} \textcolor{orange}{f} \textcolor{orange}{g} + \textcolor{yellow}{c} \textcolor{yellow}{d} \textcolor{yellow}{h} - \textcolor{blue}{c} \textcolor{blue}{e} \textcolor{blue}{g} - \textcolor{blue}{a} \textcolor{blue}{f} \textcolor{blue}{h} - \textcolor{green}{b} \textcolor{green}{d} \textcolor{green}{i}$$

Exemple 3

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Développement par rapport à une ligne ou une colonne

$$\forall i = 1 \dots n \quad \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

$$\forall j = 1 \dots n \quad \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Développement par rapport à une ligne ou une colonne

$$\forall i = 1 \dots n \quad \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

$$\forall j = 1 \dots n \quad \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Définition

$(-1)^{i+j} \det A_{ij}$: cofacteur de a_{ij}

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \textcolor{red}{a} & \textcolor{blue}{b} & \textcolor{orange}{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \textcolor{red}{a} \quad - \textcolor{blue}{b} \quad + \textcolor{orange}{c}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & \textcolor{red}{b} & c \\ d & \textcolor{blue}{e} & f \\ g & \textcolor{orange}{h} & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \textcolor{red}{-b} \quad \textcolor{blue}{+e} \quad \textcolor{orange}{-h}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

A diagram illustrating the expansion of a 3x3 determinant by the middle element e . The determinant is represented by a large vertical bar enclosing a 3x3 grid of elements: a , b , c in the top row; d , e , f in the middle row; and g , h , i in the bottom row. The element e is circled in blue. A horizontal blue line passes through d , e , and f . A vertical blue line passes through b , e , and h . The elements a , b , and c are each enclosed in a light blue rounded square. Similarly, g , h , and i are each enclosed in a light blue rounded square.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

Règle des signes

$$((-1)^{i+j}) = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots & \dots \\ - & + & - & + & & \\ + & - & + & - & & \\ - & + & - & + & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= a$$

$$- e$$

$$+ i$$

$$- m$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ m & n & p \end{vmatrix} - l \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= \textcolor{red}{i} \quad \textcolor{blue}{-j} \quad \textcolor{orange}{+k} \quad \textcolor{green}{-l}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
 \begin{array}{cc} a & b \end{array} & c & \begin{array}{c} d \end{array} \\
 \begin{array}{cc} e & f \end{array} & g & \begin{array}{c} h \end{array} \\
 i & j & \textcircled{k} & l \\
 \begin{array}{cc} m & n \end{array} & o & \begin{array}{c} p \end{array}
 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ m & n & p \end{vmatrix} - l \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ m & n & p \end{vmatrix} - l \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Exemple 3 (suite)

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\det A &= \det(C_1 \cdots C_{j-1} \quad C_j \quad C_{j+1} \cdots C_n) \\ &= \det(C_1 \cdots C_{j-1} \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} E_i \quad C_{j+1} \cdots C_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \det(C_1 \cdots C_{j-1} \quad E_i \quad C_{j+1} \cdots C_n)\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\det A = \begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_{1j} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{nj} & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

(j)

Démonstration.

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \end{vmatrix} \quad (i)$$

(j)

Démonstration.

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \end{vmatrix} \quad (i)$$

(j)

Démonstration.

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & * & \dots & \dots & \dots & * \end{vmatrix}$$

Démonstration.

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & A_{ij} & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{vmatrix}$$

Démonstration.

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$



Méthode de calcul d'un déterminant

- ▶ Algorithme du pivot de Gauss
(lignes ou colonnes)
se ramener à une matrice triangulaire
- ▶ Taille $(2, 2)$: règle de l'alpha
Taille $(3, 3)$: règle de Sarrus
- ▶ Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

▷ Exercice 2.

Calculer les déterminants suivants en utilisant, au choix :

- ▶ Un développement par rapport à une colonne (au choix).
- ▶ Un développement par rapport à une ligne (au choix).
- ▶ La règle de Sarrus.

▷ **Exercice 2.**

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} -14 & 0 & 13 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 2 & -34 & 1 \\ 0 & 15 & 27 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$d_6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Chapitre B12. Déterminants

I. Déterminant d'une matrice

II. **Groupe symétrique**

A. Généralités

B. Signature

III. Multilinéarité

IV. Déterminant en base quelconque

V. Applications

II. Groupe symétrique

A. Généralités

B. Signature

Définition

Le **groupe symétrique** $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Définition

Le **groupe symétrique** $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Proposition

$(\mathcal{S}_n, \circ)$ est un groupe

Définition

Le **groupe symétrique** $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Proposition

$(\mathcal{S}_n, \circ)$ est un groupe fini,

Définition

Le **groupe symétrique** $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Proposition

$(\mathcal{S}_n, \circ)$ est un groupe fini, de cardinal $n!$.

Définition

Le **groupe symétrique** $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Proposition

$(\mathcal{S}_n, \circ)$ est un groupe fini, de cardinal $n!$.
Il n'est pas commutatif si $n \geq 3$.

Définition

Le **groupe symétrique** $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Notations

► $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n = \mathfrak{S}_n$

Définition

Le **groupe symétrique** $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Notations

► $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n = \mathfrak{S}_n$

► On note $\sigma\tau$ au lieu de $\sigma \circ \tau$.

Définition

Le **groupe symétrique** $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Notations

► $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n = \mathfrak{S}_n$

► On note $\sigma\tau$ au lieu de $\sigma \circ \tau$.

Remarque

Attention à l'ordre : si σ et τ sont deux permutation alors $\sigma\tau$ est l'application qui à un élément k de $\{1, \dots, n\}$ associe $\sigma(\tau(k))$.

Définition

Le **groupe symétrique** $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Notations

- ▶ $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n = \mathfrak{S}_n$
- ▶ On note $\sigma\tau$ au lieu de $\sigma \circ \tau$.
- ▶ Élément neutre : $e = \text{Id}_{\{1, \dots, n\}}$

Définition

Le **groupe symétrique** $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Notations

- ▶ $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n = \mathfrak{S}_n$
- ▶ On note $\sigma\tau$ au lieu de $\sigma \circ \tau$.
- ▶ Élément neutre : $e = \text{Id}_{\{1, \dots, n\}}$
- ▶ Une permutation σ de $\mathcal{S}_n$ est notée :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Exemple 4

Dans $\mathcal{S}_6$ on note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer : σ^2 τ^2 σ^{-1} $\sigma\tau$ $\tau\sigma$

Exemple 4

Dans $\mathcal{S}_6$ on note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer : σ^2 τ^2 σ^{-1} $\sigma\tau$ $\tau\sigma$

Donner des entiers k non-nuls minimaux tels que :

$$\sigma^k = e \quad \tau^k = e \quad (\sigma\tau)^k = e$$

Définitions

- (i) Le **support** d'une permutation est l'ensemble de ses points non fixes.

Définitions

- (i) Le **support** d'une permutation est l'ensemble de ses points non fixes.

Remarques

- (i) Si deux permutations ont des supports disjoints alors elles commutent.

Définitions

(ii) Un **cycle** est une permutation σ de la forme :

$$\sigma : a_1 \longmapsto a_2$$

$$a_2 \longmapsto a_3$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{p-1} \longmapsto a_p$$

$$a_p \longmapsto a_1$$

$$a \longmapsto a \qquad \text{si } a \notin \{a_1, \dots, a_p\}$$

Définitions

(ii) Un **cycle** est une permutation σ de la forme :

$$\begin{array}{lll}
 \sigma : & a_1 & \longmapsto a_2 \\
 & a_2 & \longmapsto a_3 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & a_{p-1} & \longmapsto a_p \\
 & a_p & \longmapsto a_1 \\
 & a & \longmapsto a \quad \text{si } a \notin \{a_1, \dots, a_p\}
 \end{array}$$

Ce cycle est **d'ordre** p , c'est un **p -cycle**.

On le note :

$$\sigma = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$$

Définitions

(ii) Un **cycle** est une permutation σ de la forme :

$$\begin{array}{lll}
 \sigma : & a_1 & \longmapsto a_2 \\
 & a_2 & \longmapsto a_3 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & a_{p-1} & \longmapsto a_p \\
 & a_p & \longmapsto a_1 \\
 & a & \longmapsto a \quad \text{si } a \notin \{a_1, \dots, a_p\}
 \end{array}$$

Remarques

(ii) $\sigma^p = e \quad \sigma^{-1} = \sigma^{p-1}$

Définitions

(ii) Un **cycle** est une permutation σ de la forme :

$$\begin{array}{lll}
 \sigma : & a_1 & \longmapsto a_2 \\
 & a_2 & \longmapsto a_3 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & a_{p-1} & \longmapsto a_p \\
 & a_p & \longmapsto a_1 \\
 & a & \longmapsto a \quad \text{si } a \notin \{a_1, \dots, a_p\}
 \end{array}$$

(iii) Une **transposition** est un cycle d'ordre 2.

$$\tau = (a \ b)$$

Théorème

Toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints.

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs. Ses cycles commutent.

Théorème

Toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints.

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs. Ses cycles commutent.

Démonstration. Admise.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

L'ensemble $\{1, \dots, n\}$ est partitionné en **orbites** :

$$\text{Orb}(i) = \{ \sigma^k(i) \mid k \in \mathbb{N} \}$$

Sur chaque orbite σ est un cycle.

σ est le produit commutatif de ces cycles.

Théorème

Toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints.

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs. Ses cycles commutent.

Démonstration. Admise.

Pour l'unicité :

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$$

Les orbites sont uniquement déterminées.

La restriction de σ à chaque orbite est uniquement déterminée. □

Exemple 5

Dans $\mathcal{S}_8$ on définit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 3 & 5 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire sous forme de produit de cycles à supports disjoints σ , τ et $\tau\sigma$, ainsi que leurs inverses.

Exemple 6

Dans $\mathcal{S}_4$ soit :

$$\tau_1 = (1\ 2) \quad \tau_2 = (1\ 3) \quad \tau_3 = (1\ 4)$$

Calculer :

$$\tau_1\tau_2 \quad \tau_2\tau_1 \quad \tau_1\tau_2\tau_1 \quad \tau_3\tau_2\tau_1 \quad \tau_1\tau_3\tau_2\tau_1$$

Théorème

Toute permutation est produit de transpositions.

Théorème

Toute permutation est produit de transpositions.

Remarques

(i) Pour le cycle $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ p)$:

$$\sigma = (1 \ p)(1 \ p-1) \dots (1 \ 2)$$

Théorème

Toute permutation est produit de transpositions.

Remarques

(i) Pour le cycle $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ p)$:

$$\sigma = (1 \ p)(1 \ p - 1) \dots (1 \ 2)$$

Tout p -cycle est produit de $p - 1$ transpositions.

Théorème

Toute permutation est produit de transpositions.

Remarques

(i) Pour le cycle $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ p)$:

$$\sigma = (1 \ p)(1 \ p-1) \dots (1 \ 2)$$

Tout p -cycle est produit de $p-1$ transpositions.

Le théorème ci-dessus est conséquence du précédent.

Théorème

Toute permutation est produit de transpositions.

Remarques

- (i) Le théorème ci-dessus est conséquence du précédent.
- (ii) La décomposition n'est pas unique.

$$(1\ 2)(1\ 3) \quad (1\ 3)(2\ 3)$$

Théorème

Toute permutation est produit de transpositions.

Remarques

- (i) Le théorème ci-dessus est conséquence du précédent.
- (ii) La décomposition n'est pas unique.

$$(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3)(2\ 3)$$

Exemples : premiers groupes symétriques

$$(i) \mathcal{S}_1 =$$

Exemples : premiers groupes symétriques

$$(i) \mathcal{S}_1 = \{e\}$$

$$(ii) \mathcal{S}_2 =$$

Exemples : premiers groupes symétriques

$$(i) \mathcal{S}_1 = \{e\}$$

$$(ii) \mathcal{S}_2 = \{e, \tau\}$$

$$(iii) \mathcal{S}_3$$

Exemples : premiers groupes symétriques

$$(i) \mathcal{S}_1 = \{e\}$$

$$(ii) \mathcal{S}_2 = \{e, \tau\}$$

(iii) $\mathcal{S}_3$ contient l'identité,
trois transpositions,
deux 3-cycles.

Exemples : premiers groupes symétriques

(iv) $\mathcal{S}_4$ contient

Exemples : premiers groupes symétriques

(iv) $\mathcal{S}_4$ contient l'identité,

Exemples : premiers groupes symétriques

- (iv) $\mathcal{S}_4$ contient l'identité,
? transpositions,
? 3-cycles,
? 4-cycles,

Exemples : premiers groupes symétriques

(iv) $\mathcal{S}_4$ contient l'identité,
six transpositions,
huit 3-cycles,
six 4-cycles,

Exemples : premiers groupes symétriques

(iv) $\mathcal{S}_4$ contient l'identité,
six transpositions,
huit 3-cycles,
six 4-cycles,
trois produits de deux transpositions
à supports disjoints.

▷ Exercice 3.

Dans $\mathcal{S}_3$ on note $\tau = (1\ 2)$ et $\sigma = (1\ 2\ 3)$.

- Calculer $\tau\sigma$, $\sigma\tau$, σ^2 .
- Vérifier que tous les éléments de $\mathcal{S}_3$ sont ainsi obtenus.
- Vérifier que $\tau_1 = (1\ 2)$ et $\tau_2 = (2\ 3)$ permettent aussi d'obtenir tous les éléments de $\mathcal{S}_3$.

II. Groupe symétrique

A. Généralités

B. Signature

Théorème

Il existe une et une seule application

$$\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

telle que :

- (i) $\forall (\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2 : \quad \varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$
- (ii) Pour toute transposition $\tau : \quad \varepsilon(\tau) = -1$

Théorème

Il existe une et une seule application

$$\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

telle que :

(i) $\forall (\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2 : \quad \varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$

(ii) Pour toute transposition $\tau : \quad \varepsilon(\tau) = -1$

Démonstration.

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad \varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Théorème

Il existe une et une seule application

$$\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

telle que :

(i) $\forall (\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2 : \quad \varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$

(ii) Pour toute transposition $\tau : \quad \varepsilon(\tau) = -1$

Démonstration.

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad \varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

L'application ε est bien définie,

Théorème

Il existe une et une seule application

$$\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

telle que :

(i) $\forall (\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2 : \quad \varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$

(ii) Pour toute transposition $\tau : \quad \varepsilon(\tau) = -1$

Démonstration.

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad \varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

L'application ε est bien définie, elle prend ses valeurs dans $\{\pm 1\}$,

Théorème

Il existe une et une seule application

$$\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

telle que :

(i) $\forall (\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2 : \quad \varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$

(ii) Pour toute transposition $\tau : \quad \varepsilon(\tau) = -1$

Démonstration.

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad \varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

L'application ε est bien définie, elle prend ses valeurs dans $\{\pm 1\}$, elle satisfait (i) et (ii).



Théorème

Il existe une et une seule application

$$\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

telle que :

- (i) $\forall (\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2 : \quad \varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$
- (ii) Pour toute transposition $\tau : \quad \varepsilon(\tau) = -1$

Définition

L'application ε est appelée **signature**.

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on dit que $\varepsilon(\sigma)$ est la **signature** de σ .

Démonstration partielle.

$$(i) \forall (\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2 : \quad \varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma\sigma') &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma\sigma'(j) - \sigma\sigma'(i)}{j - i} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma\sigma'(j) - \sigma\sigma'(i)}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} \\ &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') \end{aligned}$$

Démonstration partielle.

(ii) **Pour toute transposition τ :** $\varepsilon(\tau) = -1$

On vérifie que

$$(1\ 2) = (2\ j)(1\ i)(i\ j)(1\ i)(2\ j)$$

même si i ou j est égal à 1 ou 2.

Il suffit donc de prouver que $\varepsilon((1\ 2)) = -1$.

Démonstration partielle. (ii) $\varepsilon((1\ 2)) = -1$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\tau) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
 &= \prod_{j=2}^n \frac{\sigma(j) - 2}{j - 1} \prod_{j=3}^n \frac{\sigma(j) - 1}{j - 2} \\
 &= \frac{1 - 2}{2 - 1} \prod_{j=3}^n \frac{\sigma(j) - 2}{j - 1} \prod_{j=3}^n \frac{\sigma(j) - 1}{j - 2} \\
 &= - \prod_{j=3}^n \frac{j - 2}{j - 1} \prod_{j=3}^n \frac{j - 1}{j - 2} = -1
 \end{aligned}$$

Remarques

(i) Produit de p transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \dots \tau_p \quad \implies \quad \varepsilon(\sigma) = (-1)^p$$

Remarques

(i) Produit de p transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \dots \tau_p \quad \implies \quad \varepsilon(\sigma) = (-1)^p$$

(ii) Si σ s'écrit de deux façons différentes comme produit de transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \dots \tau_p = \tau'_1 \dots \tau'_q$$

Alors p et q ont même parité.

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^p = (-1)^q$$

Remarques

(iii) p -cycle $\sigma = (a_1 \dots a_p)$:

$$\sigma = (a_1 \ a_p)(a_1 \ a_{p-1}) \dots (a_1 \ a_2)$$

$$\text{Donc : } \varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$$

Remarques

(iii) p -cycle $\sigma = (a_1 \dots a_p)$:

$$\sigma = (a_1 \ a_p)(a_1 \ a_{p-1}) \dots (a_1 \ a_2)$$

Donc : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$

(iv) Décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints d'ordres $p_1, \dots, p_r$:

$$\sigma = \prod_{i=1}^r \sigma_i$$

Alors :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^r (-1)^{p_i-1}$$

Remarques

(v) Deux méthodes pour calculer la signature :

- ▶ Décomposition en produit de transpositions,
- ▶ Décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

Exemple

Déterminer la signature des permutations suivantes.

σ	e	$(3\ 1)$	$(5\ 4\ 1)$	$(3\ 5)(6\ 1)$
$\varepsilon(\sigma)$				

σ	$(4\ 8\ 1\ 2)$	$(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)$	$(1\ 4\ 6)(4\ 1\ 2)$
$\varepsilon(\sigma)$			

Exemple

Déterminer la signature des permutations suivantes.

σ	e	$(3\ 1)$	$(5\ 4\ 1)$	$(3\ 5)(6\ 1)$
$\varepsilon(\sigma)$	1			

σ	$(4\ 8\ 1\ 2)$	$(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)$	$(1\ 4\ 6)(4\ 1\ 2)$
$\varepsilon(\sigma)$			

Exemple

Déterminer la signature des permutations suivantes.

σ	e	$(3\ 1)$	$(5\ 4\ 1)$	$(3\ 5)(6\ 1)$
$\varepsilon(\sigma)$	1	-1		

σ	$(4\ 8\ 1\ 2)$	$(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)$	$(1\ 4\ 6)(4\ 1\ 2)$
$\varepsilon(\sigma)$			

Exemple

Déterminer la signature des permutations suivantes.

σ	e	$(3\ 1)$	$(5\ 4\ 1)$	$(3\ 5)(6\ 1)$
$\varepsilon(\sigma)$	1	-1	1	

σ	$(4\ 8\ 1\ 2)$	$(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)$	$(1\ 4\ 6)(4\ 1\ 2)$
$\varepsilon(\sigma)$			

Exemple

Déterminer la signature des permutations suivantes.

σ	e	$(3\ 1)$	$(5\ 4\ 1)$	$(3\ 5)(6\ 1)$
$\varepsilon(\sigma)$	1	-1	1	1

σ	$(4\ 8\ 1\ 2)$	$(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)$	$(1\ 4\ 6)(4\ 1\ 2)$
$\varepsilon(\sigma)$			

Exemple

Déterminer la signature des permutations suivantes.

σ	e	$(3\ 1)$	$(5\ 4\ 1)$	$(3\ 5)(6\ 1)$
$\varepsilon(\sigma)$	1	-1	1	1

σ	$(4\ 8\ 1\ 2)$	$(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)$	$(1\ 4\ 6)(4\ 1\ 2)$
$\varepsilon(\sigma)$	-1		

Exemple

Déterminer la signature des permutations suivantes.

σ	e	$(3\ 1)$	$(5\ 4\ 1)$	$(3\ 5)(6\ 1)$
$\varepsilon(\sigma)$	1	-1	1	1

σ	$(4\ 8\ 1\ 2)$	$(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)$	$(1\ 4\ 6)(4\ 1\ 2)$
$\varepsilon(\sigma)$	-1	-1	

Exemple

Déterminer la signature des permutations suivantes.

σ	e	$(3\ 1)$	$(5\ 4\ 1)$	$(3\ 5)(6\ 1)$
$\varepsilon(\sigma)$	1	-1	1	1

σ	$(4\ 8\ 1\ 2)$	$(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)$	$(1\ 4\ 6)(4\ 1\ 2)$
$\varepsilon(\sigma)$	-1	-1	1

▷ Exercice 4.

On note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculer $\tau\sigma$, puis les signatures de σ , τ et $\tau\sigma$.

▷ Exercice 5.

Soit $n \geq 2$.

- a. Soit τ une transposition de $\mathcal{S}_n$.

Démontrer que l'application $\sigma \mapsto \tau\sigma$ réalise une bijection de $\mathcal{S}_n$.

- b. En déduire que $\mathcal{S}_n$ possède autant de permutations de signature 1 que de permutations de signature -1 .

Vérifier ceci avec $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$.

Chapitre B12. Déterminants

I. Déterminant d'une matrice

II. Groupe symétrique

III. Multilinéarité

- A. Applications multilinéaires
- B. Applications multilinéaires alternées
- C. Formes multilinéaires alternées
- D. Compléments sur le déterminant d'une matrice
- E. Comatrice

IV. Déterminant en base quelconque

V. Applications

III. Multilinéarité

- A. Applications multilinéaires
- B. Applications multilinéaires alternées
- C. Formes multilinéaires alternées
- D. Compléments sur le déterminant d'une matrice
- E. Comatrice

Définition

E, F espaces vectoriels. Une application

$$f : E^n \rightarrow F$$

est **n -linéaire** si elle est linéaire par rapport à chaque variable.

Définition

E, F espaces vectoriels. Une application

$$f : E^n \rightarrow F$$

est **n -linéaire** si elle est linéaire par rapport à chaque variable.

Ceci signifie que toutes les applications

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow F \\ \textcolor{red}{u} &\longmapsto f(u_1, \dots, u_{i-1}, \textcolor{red}{u}, u_{i+1}, \dots, u_n) \end{aligned}$$

sont linéaires.

Définition

Une application 2-linéaire est dite **bilinéaire**.

Une application 3-linéaire est dite **trilinéaire**.

Définition

Une application 2-linéaire est dite **bilinéaire**.

Une application 3-linéaire est dite **trilinéaire**.

Exemple

$f : E^2 \rightarrow F$ bilinéaire.

Pour tous vecteurs u, v de E et tout scalaire λ :

$$f(\lambda u + v, \lambda u + v) =$$

Définition

Une application 2-linéaire est dite **bilinéaire**.

Une application 3-linéaire est dite **trilinéaire**.

Exemple

$f : E^2 \rightarrow F$ bilinéaire.

Pour tous vecteurs u, v de E et tout scalaire λ :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v, \lambda u + v) &= \lambda^2 f(u, u) + \lambda f(u, v) \\ &\quad + \lambda f(v, u) + f(v, v) \end{aligned}$$

III. Multilinéarité

- A. Applications multilinéaires
- B. Applications multilinéaires alternées**
- C. Formes multilinéaires alternées
- D. Compléments sur le déterminant d'une matrice
- E. Comatrice

Définition

Une application n -linéaire $f : E^n \rightarrow F$ est **alternée** si elle est nulle dès que deux de ses variables sont égales :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \\ i \neq j \quad \text{et} \quad u_i = u_j \quad \implies \quad f(u_1, \dots, u_n) = 0_F$$

Définition

$f : E^n \rightarrow F$ est **alternée** si :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$$

$$i \neq j \quad \text{et} \quad u_i = u_j \quad \implies \quad f(u_1, \dots, u_n) = 0_F$$

Proposition

Une application n -linéaire $f : E^n \rightarrow F$ est alternée si et seulement si elle est **antisymétrique**.

Définition

$f : E^n \rightarrow F$ est **alternée** si :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$$

$$i \neq j \quad \text{et} \quad u_i = u_j \quad \implies \quad f(u_1, \dots, u_n) = 0_F$$

Proposition

$f : E^n \rightarrow F$ est alternée ssi elle est **antisymétrique** :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$$

$$\begin{aligned} i < j \quad \implies \quad & f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) \\ &= -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Démonstration.

Démonstration.



Proposition

$f : E^n \rightarrow F$ n -linéaire alternée $\sigma \in \mathcal{S}_n$

$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}) =$$

Proposition

$f : E^n \rightarrow F$ n -linéaire alternée $\sigma \in \mathcal{S}_n$

$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Proposition

$f : E^n \rightarrow F$ n -linéaire alternée $\sigma \in \mathcal{S}_n$

$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Démonstration.

Si τ est une transposition, alors comme f est alternée :

$$f(u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}, \dots, u_{\tau(n)}) = -f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Proposition

$f : E^n \rightarrow F$ n -linéaire alternée $\sigma \in \mathcal{S}_n$

$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Démonstration.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et soit $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

Alors $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_p$.

$$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = (-1)^p f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$



Proposition

$f : E^n \rightarrow F$ application n -linéaire alternée.

$u_1, \dots, u_n$ vecteurs de E .

Si $(u_1, \dots, u_n)$ est liée alors $f(u_1, \dots, u_n) = 0_F$.

Proposition

$f : E^n \rightarrow F$ application n -linéaire alternée.

$u_1, \dots, u_n$ vecteurs de E .

Si $(u_1, \dots, u_n)$ est liée alors $f(u_1, \dots, u_n) = 0_F$.

Démonstration.

Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$$

Soit k tel que λ_k est non-nul.

Proposition

$f : E^n \rightarrow F$ application n -linéaire alternée.

$u_1, \dots, u_n$ vecteurs de E .

Si $(u_1, \dots, u_n)$ est liée alors $f(u_1, \dots, u_n) = 0_F$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} 0_F &= f(u_1, \dots, u_{k-1}, \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, u_{k+1}, \dots, u_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_1, \dots, u_{k-1}, u_i, u_{k+1}, \dots, u_n) \\ &= \lambda_k f(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Comme $\lambda_k \neq 0$ alors $f(u_1, \dots, u_n) = 0_F$.



III. Multilinéarité

- A. Applications multilinéaires
- B. Applications multilinéaires alternées
- C. Formes multilinéaires alternées
- D. Compléments sur le déterminant d'une matrice
- E. Comatrice

Remarque

Forme n -linéaire alternée de E :

Application n -linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$.

Remarque

Forme n -linéaire alternée de E :

Application n -linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$.

Théorème

E de dimension finie n $(e_1, \dots, e_n)$ base de E .

- ▶ Il existe une et une seule forme n -linéaire alternée $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.
- ▶ Si g est une autre forme n -linéaire alternée de E alors $g = \lambda f$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

Théorème

E de dimension finie n $(e_1, \dots, e_n)$ base de E .

- ▶ Il existe une et une seule forme n -linéaire alternée $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.
- ▶ Si g est une autre forme n -linéaire alternée de E alors $g = \lambda f$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple 7

Cas $n = 2$.

Théorème

E de dimension finie n $(e_1, \dots, e_n)$ base de E .

- ▶ Il existe une et une seule forme n -linéaire alternée $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.
- ▶ Si g est une autre forme n -linéaire alternée de E alors $g = \lambda f$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarques

- (i) Deux formes n -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n sont proportionnelles.

Démonstration.

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_n) &= f\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in}e_i\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_n) &= f\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in}e_i\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \quad \square \end{aligned}$$

Remarques

(ii) Autre formule :

$$f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Remarques

(ii) Autre formule :

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} \end{aligned}$$

Remarques

(ii) Autre formule :

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

III. Multilinéarité

- A. Applications multilinéaires
- B. Applications multilinéaires alternées
- C. Formes multilinéaires alternées
- D. Compléments sur le déterminant d'une matrice
- E. Comatrice

Corollaire

Il existe une et une seule application

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

linéaire par rapport à chaque colonne et alternée, telle que $\det(I_n) = 1$.

Corollaire

Il existe une et une seule application

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

linéaire par rapport à chaque colonne et alternée, telle que $\det(I_n) = 1$.

Démonstration. On se ramène au théorème précédent grâce à l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} M : \quad E^n &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto M_{\mathcal{B}_c}(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Démonstration. On se ramène au théorème précédent grâce à l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} M : \quad E^n &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto M_{\mathcal{B}_c}(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Soit f la forme n -linéaire alternée de E_n telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Alors $\det = f \circ M^{-1}$ vérifie les propriétés demandées. □

Théorème

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice. Alors :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Théorème

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice. Alors :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Démonstration. Ceci est conséquence de la remarque (ii) ci-dessus.



Théorème

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice. Alors :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Exemples

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Théorème

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice. Alors :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Exemples

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \\ + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Théorème

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice. Alors :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Exemples

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_e + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}_{\sigma, \sigma^2} - \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}_{\tau_1, \tau_2, \tau_3}$$

Lemme : formule pour le cofacteur

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \det A'$$

Démonstration.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Démonstration.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A' & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A' & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} \\ &= \det A' \end{aligned}$$



III. Multilinéarité

- A. Applications multilinéaires
- B. Applications multilinéaires alternées
- C. Formes multilinéaires alternées
- D. Compléments sur le déterminant d'une matrice
- E. Comatrice

Rappel

A_{ij} : sous-matrice obtenue en supprimant L_i et C_j .

Rappel

A_{ij} : sous-matrice obtenue en supprimant L_i et C_j .

Cofacteur de a_{ij} : $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Rappel

A_{ij} : sous-matrice obtenue en supprimant L_i et C_j .

Cofacteur de a_{ij} : $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Développement par rapport à une ligne :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij}$$

Rappel

A_{ij} : sous-matrice obtenue en supprimant L_i et C_j .

Cofacteur de a_{ij} : $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Développement par rapport à une colonne :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} c_{ij}$$

Rappel

A_{ij} : sous-matrice obtenue en supprimant L_i et C_j .

Cofacteur de a_{ij} : $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Définition

La **comatrice** est la matrice des cofacteurs :

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Avec $\forall i, j = 1, \dots, n \quad c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Proposition

Pour toute matrice A de taille (n, n) :

$$A {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A)A = \det(A)I_n$$

Proposition

Pour toute matrice A de taille (n, n) :

$$A {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A)A = \det(A)I_n$$

Démonstration.

- ▶ ${}^t\text{Com}(A) = (c'_{jk}) = (c_{kj})$
- ▶ $A {}^t\text{Com}(A) = (b_{ik})$

Proposition

Pour toute matrice A de taille (n, n) :

$$A {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A)A = \det(A)I_n$$

Démonstration.

$$\blacktriangleright {}^t\text{Com}(A) = (c'_{jk}) = (c_{kj})$$

$$\blacktriangleright A {}^t\text{Com}(A) = (b_{ik})$$

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c'_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{kj} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition

Pour toute matrice A de taille (n, n) :

$$A {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A)A = \det(A)I_n$$

Démonstration.

$$\blacktriangleright {}^t\text{Com}(A) = (c'_{jk}) = (c_{kj})$$

$$\blacktriangleright A {}^t\text{Com}(A) = (b_{ik})$$

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c'_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{kj} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit : $A {}^t\text{Com}(A) = \det(A)I_n$

Proposition

Pour toute matrice A de taille (n, n) :

$$A {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A)A = \det(A)I_n$$

Démonstration.

$$\blacktriangleright {}^t\text{Com}(A) = (c'_{jk}) = (c_{kj})$$

$$\blacktriangleright A {}^t\text{Com}(A) = (b_{ik})$$

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c'_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{kj} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit : $A {}^t\text{Com}(A) = \det(A)I_n$

De même : ${}^t\text{Com}(A)A = \det(A)I_n.$



Proposition

Pour toute matrice A de taille (n, n) :

$$A {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A)A = \det(A)I_n$$

Corollaire

Si A est inversible alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{Com}(A)$$

Corollaire

Si A est inversible alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{Com}(A)$$

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \text{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Corollaire

Si A est inversible alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{Com}(A)$$

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \text{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple : inverse d'une matrice de taille (3, 3).

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Chapitre B12. Déterminants

I. Déterminant d'une matrice

II. Groupe symétrique

III. Multilinéarité

IV. Déterminant en base quelconque

A. Déterminant d'une famille de vecteurs

B. Déterminant d'un endomorphisme

V. Applications

IV. Déterminant en base quelconque

A. Déterminant d'une famille de vecteurs

B. Déterminant d'un endomorphisme

Définition

$\mathcal{F}$ famille de n vecteurs d'un ev de dimension n

Déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

Remarque

Si $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}^n$:

$$\det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}) = \det \mathcal{F}$$

Exemple 8

$$E = \mathbb{R}_2[X]$$

$$P_0 = 1 + X + X^2$$

$$P_1 = 2 - X^2$$

$$P_2 = 3X + 5X^2$$

Remarques

(i) En général

$$\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F}) \neq \det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{F})$$

Remarques

(i) En général

$$\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F}) \neq \det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{F})$$

(ii) Multilinéarité : $\forall i = 1 \dots n$

$E \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire

$$u_i \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Remarques

(i) En général

$$\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F}) \neq \det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{F})$$

(ii) Multilinéarité : $\forall i = 1 \dots n$

$E \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire

$$u_i \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Antisymétrie :

$$\begin{aligned} & \det_{\mathcal{B}}(u_1 \dots u_i \dots u_j \dots u_n) \\ &= -\det_{\mathcal{B}}(u_1 \dots u_j \dots u_i \dots u_n) \end{aligned}$$

Théorème

$\mathcal{F}$ famille de n vecteurs de E de dimension n

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E

$\iff$ (ii) $\forall \mathcal{B}$ base de E $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$

$\iff$ (iii) $\exists \mathcal{B}$ base de E $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$

Démonstration.

Théorème

$\mathcal{F}$ famille de n vecteurs de E de dimension n

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E

$\iff$ (ii) $\forall \mathcal{B}$ base de E $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$

$\iff$ (iii) $\exists \mathcal{B}$ base de E $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$

Démonstration.

(i) $\implies$ (ii) : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det P_{\mathcal{B}\mathcal{F}} \neq 0$

Théorème

$\mathcal{F}$ famille de n vecteurs de E de dimension n

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E

$\iff$ (ii) $\forall \mathcal{B}$ base de E $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$

$\iff$ (iii) $\exists \mathcal{B}$ base de E $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$

Démonstration.

(ii) $\implies$ (iii) évidente

Théorème

$\mathcal{F}$ famille de n vecteurs de E de dimension n

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E

$\iff$ (ii) $\forall \mathcal{B}$ base de E $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$

$\iff$ (iii) $\exists \mathcal{B}$ base de E $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$

Démonstration. (iii) $\implies$ (i) :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

$$\implies \det M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ est la matrice d'une base de } \mathbb{K}^n$$

Théorème

$\mathcal{F}$ famille de n vecteurs de E de dimension n

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E

$\iff$ (ii) $\forall \mathcal{B}$ base de E $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$

$\iff$ (iii) $\exists \mathcal{B}$ base de E $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$

Démonstration. (iii) $\implies$ (i) :

$E \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme.

$u \longmapsto M_{\mathcal{B}}(u)$

$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est la matrice d'une base de $\mathbb{K}^n$

$\implies \mathcal{F}$ est une base de E



IV. Déterminant en base quelconque

A. Déterminant d'une famille de vecteurs

B. Déterminant d'un endomorphisme

► $\dim E = n$

► $f \in \mathcal{L}(E)$

Définition

- ▶ f endomorphisme de E
- ▶ $\mathcal{B}$ une base de E

Déterminant de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \det(M_{\mathcal{B}}(f))$$

Définition

Déterminant de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \det(M_{\mathcal{B}}(f))$$

Théorème

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \det_{\mathcal{B}'}(f)$$

Définition

Déterminant de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \det(M_{\mathcal{B}}(f))$$

Théorème

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \det_{\mathcal{B}'}(f)$$

Le déterminant de f ne dépend pas de la base choisie

Définition

Déterminant de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \det(M_{\mathcal{B}}(f))$$

Théorème

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \det_{\mathcal{B}'}(f)$$

Définition

Déterminant de f :

$$\det f = \det_{\mathcal{B}}(f)$$

Théorème

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \det_{\mathcal{B}'}(f)$$

Démonstration.

$$A = PA'P^{-1}$$

Théorème

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \det_{\mathcal{B}'}(f)$$

Démonstration.

$$A = PA'P^{-1}$$

$$\implies \det A = \det P \det A' \det P^{-1}$$

Théorème

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \det_{\mathcal{B}'}(f)$$

Démonstration.

$$A = PA'P^{-1}$$

$$\begin{aligned}\implies \det A &= \det P \det A' \det P^{-1} \\ &= \det A' \det P \det P^{-1}\end{aligned}$$

Théorème

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \det_{\mathcal{B}'}(f)$$

Démonstration.

$$A = PA'P^{-1}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \det A &= \det P \det A' \det P^{-1} \\ &= \det A' \det P \det P^{-1} \\ &= \det A'\end{aligned}$$



Remarques

- (i) Ainsi pour calculer le déterminant de f on utilise sa matrice dans n'importe quelle base de E .

Remarques

- (i) Ainsi pour calculer le déterminant de f on utilise sa matrice dans n'importe quelle base de E .
- (ii) Soit A une matrice carrée de taille (n, n) , et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A .
Alors : $\det f = \det A$

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}} (f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}} (u_1, \dots, u_n)$$

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration. $\forall i = 1, \dots, n :$

$$M_{\mathcal{B}}(f(u_i)) = M_{\mathcal{B}}(f) \times M_{\mathcal{B}}(u_i) = AC_i$$

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration. $\forall i = 1, \dots, n :$

$$M_{\mathcal{B}}(f(u_i)) = M_{\mathcal{B}}(f) \times M_{\mathcal{B}}(u_i) = AC_i$$

Multiplication par blocs (HP) :

$$(AC_1 \ \cdots \ AC_n) = A(C_1 \ \cdots \ C_n)$$

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration. $\forall i = 1, \dots, n :$

$$M_{\mathcal{B}}(f(u_i)) = M_{\mathcal{B}}(f) \times M_{\mathcal{B}}(u_i) = AC_i$$

Multiplication par blocs (HP) :

$$(AC_1 \ \cdots \ AC_n) = A(C_1 \ \cdots \ C_n)$$

Donc
$$M_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{F})) = M_{\mathcal{B}}(f) \times M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration. $\forall i = 1, \dots, n :$

$$M_{\mathcal{B}}(f(u_i)) = M_{\mathcal{B}}(f) \times M_{\mathcal{B}}(u_i) = AC_i$$

Multiplication par blocs (HP) :

$$(AC_1 \ \cdots \ AC_n) = A(C_1 \ \cdots \ C_n)$$

Donc
$$M_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{F})) = M_{\mathcal{B}}(f) \times M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

Puis
$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{F})) = \det f \times \det_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$$



Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration alternative.

$$F : \quad E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

F est une forme

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration alternative.

$$F : \quad E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

F est une forme n -linéaire

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration alternative.

$$\begin{aligned} F : \quad E^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \end{aligned}$$

F est une forme n -linéaire alternée

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration alternative.

$$F : \quad E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

F est une forme n -linéaire alternée de E .

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration alternative.

$$F : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

F est une forme n -linéaire alternée de E .

$$\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

est également une forme n linéaire alternée de E .

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration alternative.

$$F : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

$$\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Comme E est de dimension n alors toutes les formes n -linéaires alternées sont proportionnelles.

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration alternative.

$$F : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

$$\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $F = \lambda \det_{\mathcal{B}}$

Proposition

$f \in \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{B}$ base de E $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration alternative.

$$F : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

$$\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $F = \lambda \det_{\mathcal{B}}$

$$F(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \text{ donc } \lambda = \det f.$$



Théorème

f, g endomorphismes de E :

$$\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$$

Théorème

f, g endomorphismes de E :

$$\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\det(f \circ g) &= \det M_{\mathcal{B}}(f \circ g) \\ &= \det(M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(g)) \\ &= \det M_{\mathcal{B}}(f) \det M_{\mathcal{B}}(g) \\ &= \det f \det g\end{aligned}$$



Théorème

f, g endomorphismes de E :

$$\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$$

Démonstration alternative. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$$\begin{aligned}\det(f \circ g) &= \det_{\mathcal{B}}(f(g(e_1)), \dots, f(g(e_n))) \\ &= \det f \det_{\mathcal{B}}(g(e_1), \dots, g(e_n)) \\ &= \det f \det g \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det f \det g\end{aligned}$$



Proposition

f endomorphisme de E

$$f \text{ bijective} \iff \det f \neq 0$$

Dans ce cas :

$$\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$$

Démonstration.

Soit $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

$$f \text{ bijective} \iff A \text{ inversible}$$

$$\iff \det A \neq 0$$

$$\iff \det f \neq 0$$

Démonstration.

Soit $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

$$f \text{ bijective} \iff A \text{ inversible}$$

$$\iff \det A \neq 0$$

$$\iff \det f \neq 0$$

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_E$$

$$\implies \det f \det f^{-1} = \det \text{Id}_E = \det I_n = 1$$



▷ Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto (5x + 2y, 2x + 2y)$$

puis $u_1 = (2, 1) \quad u_2 = (1, -2)$

- Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, puis dans la base $\mathcal{B}$. On note A et B ces deux matrices.

▷ Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto (5x + 2y, 2x + 2y)$$

puis $u_1 = (2, 1) \quad u_2 = (1, -2)$

c. Calculer de deux façons différentes le déterminant de f .

Justifier que f est un isomorphisme.

d. Démontrer que $f \circ f = 7f - 6\text{Id}_E$.

▷ Exercice 7.

Soit p un projecteur de E de rang r , et s la symétrie de E associée à p .

Calculer les déterminants de p et de s .

Chapitre B12. Déterminants

I. Déterminant d'une matrice

II. Groupe symétrique

III. Multilinéarité

IV. Déterminant en base quelconque

V. Applications

A. Géométrie

B. Formules de Cramer

V. Applications

A. Géométrie

B. Formules de Cramer

Exemple 9

Donner une équation cartésienne de la droite (AB) .

$$A(1, -3) \quad B(2, 1)$$

Exemple 10

$$A(0, 1, 2) \quad B(-1, 3, 0) \quad C(1, 1, 1)$$

Vérifier que ces trois points définissent un plan et donner une équation cartésienne de ce plan.

▷ Exercice 8.

Soit $\vec{u} = (-2, 0, 1)$ et $\vec{v} = (0, -2, 1)$ deux vecteurs de l'espace.

Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

V. Applications

A. Géométrie

B. Formules de Cramer

Théorème - Formules de Cramer

Le système carré $AX = B$ est un système de Cramer si et seulement si $\det A \neq 0$.

Théorème - Formules de Cramer

Le système carré $AX = B$ est un système de Cramer si et seulement si $\det A \neq 0$.

Les solutions sont alors

$$\forall i = 1 \dots n \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la colonne i de A par B .

Exemple 11

$$\begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ 5x + 6y = 12 \end{cases}$$

Exemple 11

$$\begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ 5x + 6y = 12 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 5 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}$$

Exemple 12

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Exemple 12

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}$$

Démonstration.

$$A = (C_1 \ \cdots \ C_n) \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$A = (C_1 \ \cdots \ C_n) \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B$$

Démonstration.

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B$$

Démonstration.

$$AX = B \iff x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B$$

Pour tout $i = 1 \dots n$:

$$\det A_i = \det(C_1 \cdots C_{i-1} \ B \ C_{i+1} \cdots C_n)$$

Démonstration.

$$AX = B \iff x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B$$

Pour tout $i = 1 \dots n$:

$$\begin{aligned} \det A_i &= \det(C_1 \cdots C_{i-1} B C_{i+1} \cdots C_n) \\ &= \det \left(C_1 \cdots C_{i-1} \left(\sum_{k=1}^n x_k C_k \right) C_{i+1} \cdots C_n \right) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$AX = B \iff x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B$$

Pour tout $i = 1 \dots n$:

$$\begin{aligned} \det A_i &= \det(C_1 \cdots C_{i-1} B C_{i+1} \cdots C_n) \\ &= \det \left(C_1 \cdots C_{i-1} \left(\sum_{k=1}^n x_k C_k \right) C_{i+1} \cdots C_n \right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \det(C_1 \cdots C_{i-1} C_k C_{i+1} \cdots C_n) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$AX = B \iff x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B$$

Pour tout $i = 1 \dots n$:

$$\begin{aligned} \det A_i &= \det(C_1 \cdots C_{i-1} B C_{i+1} \cdots C_n) \\ &= \det \left(C_1 \cdots C_{i-1} \left(\sum_{k=1}^n x_k C_k \right) C_{i+1} \cdots C_n \right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \det(C_1 \cdots C_{i-1} C_k C_{i+1} \cdots C_n) \\ &= x_i \det A \end{aligned}$$



▷ Exercice 9.

Résoudre les systèmes :

$$\text{a. } \begin{cases} 13x + 42y = 4 \\ 7x + 20y = 10 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} (\lambda^2 - 1)x - 2\lambda y = -2 \\ 2\lambda x + (\lambda^2 - 1)y = \lambda^3 + 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Prochain chapitre

Chapitre B13

Espaces vectoriels euclidiens