Mathématiques

Chapitre B11

Matrices et applications linéaires

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

I. Rappels et compléments sur les matrices

Chapitre B11. Matrices et applications linéaires

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

m, n, p : entiers naturels non-nuls.

Définition

$\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$: ensemble des matrices de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$

Définition

$\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$: ensemble des matrices
de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$

$\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

Définition

$\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$: ensemble des matrices
de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$

$\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

Base canonique : $(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{np})$

$$\dim \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) = np$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$$

Définition

La multiplication matricielle est l'application :

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{mp}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto AB\end{aligned}$$

Définition

La multiplication matricielle est l'application :

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{mp}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

Elle est bilinéaire :

$$\begin{aligned} &\forall A_1, A_2, B, \lambda \qquad (\lambda A_1 + A_2)B = \lambda A_1 B + A_2 B \\ &\forall A, B_1, B_2, \lambda \qquad A(\lambda B_1 + B_2) = \lambda A B_1 + A B_2 \end{aligned}$$

Définition

La multiplication matricielle est l'application :

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{mp}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

Elle est bilinéaire :

$$\begin{array}{ll} \forall A_1, A_2, B, \lambda & (\lambda A_1 + A_2)B = \lambda A_1 B + A_2 B \\ \forall A, B_1, B_2, \lambda & A(\lambda B_1 + B_2) = \lambda A B_1 + A B_2 \end{array}$$

Elle est aussi associative :

$$\forall A, B, C \qquad (AB)C = A(BC)$$

Proposition

Sous réserve d'existence, pour tous entiers i, j, k, ℓ :

$$E_{ij}E_{k\ell} =$$

Proposition

Sous réserve d'existence, pour tous entiers i, j, k, ℓ :

$$E_{ij}E_{k\ell} = \begin{cases} E_{i\ell} & \text{si } j = k \\ 0_{mp} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition

Transposition :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \longmapsto & {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition

Transposition :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \longmapsto & A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition

Transposition :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \longmapsto & {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

$${}^tA = \left(a'_{ji}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant p \\ 1\leqslant i\leqslant n}} \text{ avec } a'_{ji} = a_{ij} \text{ pour tous } i,\ j.$$

Définition

Transposition :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$

Propositions

La transposition est linéaire :

$${}^t(\lambda A + B) = \lambda\, {}^tA + {}^tB$$

Définition

Transposition :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$

Propositions

Si le produit AB est défini alors :

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

Définition

Transposition :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$

Propositions

Si A est inversible alors ${}^tA$ est inversible et :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

On note ${}^tA^{-1}$ cette matrice.

Remarque

L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et un anneau.

Remarque

L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et un anneau.

Groupe linéaire :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ inversible}\}$$

Remarque

L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel
et un anneau.

Groupe linéaire :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ inversible}\}$$

$$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \exists Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad PQ = QP = I_n$$

On note alors $P^{-1} = Q$.

Remarque

L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et un anneau.

Groupe linéaire :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ inversible}\}$$

Si A et B sont inversibles alors :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Définitions

- $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ matrices diagonales :

$$i \neq j \quad \Longrightarrow \quad a_{ij} = 0$$

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Définitions

- $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ matrices triangulaires supérieures :

$$i > j \quad \Longrightarrow \quad a_{ij} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots\ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots \; 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définitions

- $\mathscr{T}'_n(\mathbb{K})$ matrices triangulaires inférieures :

$$i < j \quad \Longrightarrow \quad a_{ij} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définitions

- $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ matrices symétriques : $\quad {}^tA = A$

  ou : $\quad \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \quad a_{ij} = a_{ji}$

- $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ matrices antisymétriques : ${}^tA = -A$

  ou : $\quad \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \quad a_{ij} = -a_{ji}$

Définitions

- $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ matrices symétriques : $\quad {}^tA = A$

  ou : $\quad \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \qquad a_{ij} = a_{ji}$

- $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ matrices antisymétriques : ${}^tA = -A$

  ou : $\quad \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \qquad a_{ij} = -a_{ji}$

Exemples

$$S = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 3 \\ -4 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 5 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Propositions

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$

sont des sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Propositions

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$

sont des sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{T}'_n(\mathbb{K})$

sont stables par multiplication interne.

Propositions

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$

sont des sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \quad \mathscr{T}'_n(\mathbb{K})$

sont stables par multiplication interne.

De plus :

$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) + \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Propositions

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ $\quad$ $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ $\quad$ $\mathscr{T}'_n(\mathbb{K})$ $\quad$ $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ $\quad$ $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$
sont des sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ $\quad$ $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ $\quad$ $\mathscr{T}'_n(\mathbb{K})$
sont stables par multiplication interne.

De plus :

$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$
$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) + \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$
$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Propositions

$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$
$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) + \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Leurs dimensions sont :

$$\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2 \qquad \dim \mathscr{D}_n(\mathbb{K}) =$$

$$\dim \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) = \qquad \dim \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) =$$

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \qquad \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) =$$

Propositions

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Leurs dimensions sont :

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2 \qquad \dim \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = n$$

$$\dim \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \qquad \dim \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) =$$

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \qquad \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) =$$

Propositions

$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) + \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Leurs dimensions sont :

$$\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2 \qquad \dim \mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = n$$

$$\dim \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \dim \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) =$$

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \qquad \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) =$$

Propositions

$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$
$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) + \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Leurs dimensions sont :

$$\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2 \qquad \dim \mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = n$$

$$\dim \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \dim \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \qquad \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) =$$

Propositions

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$
$$\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Leurs dimensions sont :

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2 \qquad \dim \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = n$$
$$\dim \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \dim \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) =$$

Propositions

$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) + \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Leurs dimensions sont :

$$\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2 \qquad \dim \mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = n$$

$$\dim \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \dim \mathscr{T}'_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

▷ Exercice 1.

$(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$

$X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \qquad A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad Y \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$

Justifier que ${}^tXAY$ et ${}^tY\,{}^tAX$ sont bien définies et égales.

Définition

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \operatorname{tr} A =$$

Définition

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Définition

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition

La trace est une forme linéaire.

$$\operatorname{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

Proposition

La trace est une forme linéaire.

$$\mathrm{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\mathrm{tr}(\lambda A + B) = \lambda \,\mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$$

Proposition

La trace est une forme linéaire.

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$
$$\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$$

Démonstration. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ alors $\lambda A + B = (\lambda a_{ij} + b_{ij})$ donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\lambda A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii} + b_{ii}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B \quad \square\end{aligned}$$

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Démonstration.

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

Démonstration. $\square$

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Démonstration. $\square$

Corollaire

Soit A et P carrées, P inversible. Alors :

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$$

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

<u>Démonstration</u>. $\square$

Corollaire

Soit A et P carrées, P inversible. Alors :

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$$

<u>Démonstration</u>.

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Démonstration. $\square$

Corollaire

Soit A et P carrées, P inversible. Alors :

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$$

Démonstration. $\square$

II. Représentations matricielles

A. Définitions

B. Correspondances bijectives

C. Liens avec la multiplication matricielle

D. Application linéaire associée à une matrice

Définition

$u \in E$ de coordonnées $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans la base $\mathscr{B}$

Représentation matricielle de u dans la base $\mathscr{B}$:

$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exemples

(i) $E = \mathbb{R}^2$

$\mathscr{B}_c = (e_1, e_2) \quad e_1 = (1, 0) \quad e_2 = (0, 1)$

$\mathscr{B} = (u_1, u_2) \quad u_1 = (-2, 1) \quad u_2 = (2, 0)$

$u = (4, 7)$

Exemples

(i) $E = \mathbb{R}^2$

$\mathscr{B}_c = (e_1, e_2) \quad e_1 = (1,0) \quad e_2 = (0,1)$

$\mathscr{B} = (u_1, u_2) \quad u_1 = (-2,1) \quad u_2 = (2,0)$

$u = (4,7)$

(ii) $E = \mathbb{K}_3[X]$

$\mathscr{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$

$P = 4 - X + 5X^3$

Définition

$\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ famille de vecteurs de E.

Représentation matricielle de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & \cdots & u_j & \cdots & u_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Définition

$f : E \to F$ linéaire

Matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$: $M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f)$

Matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ de l'image des vecteurs de $\mathscr{B}$ par f.

Remarque

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p) \qquad \mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$$

$$\forall j = 1 \ldots p \qquad f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{nj}e'_n$$

Remarque

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p) \qquad \mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$$

$$\forall j = 1 \ldots p \qquad f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{nj}e'_n$$

$$M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \end{array}$$

Remarque

En d'autres termes la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est la représentation matricielle la famille $f(\mathscr{B})$ dans la base $\mathscr{B}'$.

$$M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots\cdots & f(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \end{array} = M_{\mathscr{B}'}(f(\mathscr{B}))$$

Exemple

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (4x + 2z, -x - 5y) \end{array}$$

$$\mathscr{B}_3 : \begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0) \\ e_3 = (0, 0, 1) \end{array} \qquad \mathscr{B}_2 : \begin{array}{l} e'_1 = (1, 0) \\ e'_2 = (0, 1) \end{array}$$

$$M_{\mathscr{B}_3 \mathscr{B}_2}(f) = ?$$

Exemple

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (4x + 2z, -x - 5y) \end{array}$$

$$\mathscr{B} : \begin{array}{l} u_1 = (1, 1, 1) \\ u_2 = (1, 1, -1) \\ u_3 = (-5, 1, 10) \end{array} \qquad \mathscr{B}' : \begin{array}{l} v_1 = (1, -1) \\ v_2 = (0, 2) \end{array}$$

$$M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) = ?$$

Exemple 1

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

$$D = M_{\mathscr{B}_c\mathscr{B}_c}(d) = ?$$

▷ Exercice 2.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+3z, x-2y+2z) \end{array}$$

$$\mathscr{B} = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$$

$$\mathscr{B}' = ((1,1),(1,-1)).$$

a. Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Donner la matrice de f dans les bases canoniques, puis dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

▷ Exercice 3.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(-1)) \end{array}$$

$$P_1 = X - 1 \qquad P_2 = X + 1 \qquad P_3 = (X+1)^2$$

a. Justifier que f est linéaire.

b. Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c. Donner la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$.

d. Donner la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}_2$.

▷ Exercice 4.

E ev de dimension finie, p projecteur.
Donner la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $E = \operatorname{im} p \oplus \ker p$.

II. Représentations matricielles

Proposition

L'application $M_{\mathscr{B}}$:

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ u &\longmapsto M_{\mathscr{B}}(u) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$

Soit $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$

et $v = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$

Démonstration. $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$

Soit $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$

et $v = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$

Alors $u + v = (\lambda_1 + \mu_1) e_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n) e_n$

Démonstration. $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$

Soit $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$

et $v = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$

Alors $u + v = (\lambda_1 + \mu_1) e_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n) e_n$

Donc

$$M_{\mathscr{B}}(u+v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n + \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$$= M_{\mathscr{B}}(u) + M_{\mathscr{B}}(v)$$

<u>Démonstration</u>. $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$

Soit $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$

Alors $\alpha u = (\alpha\lambda_1) e_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n) e_n$

Donc

$$M_{\mathscr{B}}(\alpha u) = \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1 \\ \vdots \\ \alpha\lambda_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \alpha M_{\mathscr{B}}(u)$$

Démonstration.

$$\forall (u,v) \in E^2 \qquad M_{\mathscr{B}}(u+v) = M_{\mathscr{B}}(u) + M_{\mathscr{B}}(v)$$

$$\forall u \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad M_{\mathscr{B}}(\alpha u) = \alpha M_{\mathscr{B}}(u)$$

L'application $M_{\mathscr{B}}$ est donc linéaire.

Suite de la démonstration.

$$\begin{array}{rccl} M_{\mathscr{B}}: & E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ & u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} N_{\mathscr{B}}: & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & E \\ & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \end{array}$$

Suite de la démonstration.

$$\begin{array}{rccl} M_{\mathscr{B}} : & E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ & u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} N_{\mathscr{B}} : & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & E \\ & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \end{array}$$

Alors $\quad N_{\mathscr{B}} \circ M_{\mathscr{B}} = \mathrm{Id}_E \quad$ et $\quad M_{\mathscr{B}} \circ N_{\mathscr{B}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})}$

Donc $M_{\mathscr{B}}$ est bijective, de réciproque $N_{\mathscr{B}}$.

Suite de la démonstration.

$$\begin{array}{rccl} M_{\mathscr{B}} : & E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ & u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} N_{\mathscr{B}} : & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & E \\ & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \end{array}$$

L'application $M_{\mathscr{B}}$ est linéaire et bijective, donc c'est un isomorphisme. $\square$

Proposition

L'application $M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(E,F) &\xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration.

La linéarité se démontre comme pour la proposition précédente :

$$\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2 \qquad M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f+g) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) + M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(g)$$

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(\lambda f) = \lambda M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f)$$

<u>Démonstration</u>.

Réciproque de $M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$:

$$N_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} : \quad \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{L}(E,F)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} E \longrightarrow F \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j \longmapsto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\lambda_j e'_i \end{pmatrix}$$

$\square$

Remarques

(i) $M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}\big(0_{\mathscr{L}(E,F)}\big) = 0_{\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})}$

Remarques

(i) $M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(0_{\mathscr{L}(E,F)}) = 0_{\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})}$

(ii) Linéarité :

$\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$

$$M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f+g) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) + M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(g)$$

$\forall f \in \mathscr{L}(E,F) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(\lambda f) = \lambda M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f)$$

Corollaire

$$\begin{cases} \dim E = p \\ \dim F = n \end{cases} \implies \dim \mathscr{L}(E, F) = np$$

Corollaire

$$\begin{cases} \dim E = p \\ \dim F = n \end{cases} \implies \dim \mathscr{L}(E,F) = np$$

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$

Corollaire

$$\begin{cases} \dim E = p \\ \dim F = n \end{cases} \implies \dim \mathscr{L}(E,F) = np$$

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) \end{array}$$

- Un isomorphisme conserve la dimension,
- $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ est de dimension np. $\square$

Exemple

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, -x, 4x-y) \end{array} \qquad u = (x,y)$$

Exemple

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + 3y, -x, 4x - y) \end{array} \qquad u = (x, y)$$

$$M_{\mathscr{B}_3}(f(u)) =$$

Exemple

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + 3y, -x, 4x - y) \end{array} \qquad u = (x, y)$$

$$M_{\mathscr{B}_3}(f(u)) = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -x \\ 4x - y \end{pmatrix}$$

Exemple

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, -x, 4x-y) \end{array} \qquad u = (x,y)$$

$$M_{\mathscr{B}_3}(f(u)) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x \\ 4x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemple

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, -x, 4x-y) \end{array} \qquad u = (x,y)$$

$$M_{\mathscr{B}_3}(f(u)) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x \\ 4x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= M_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(f) M_{\mathscr{B}_2}(u)$$

Proposition

$$M(f(u)) = M(f)M(u)$$

Proposition

$$M(f(u)) = M(f)M(u)$$

$$M_{\mathscr{B}'}(f(u)) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f)M_{\mathscr{B}}(u)$$

Démonstration.

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p) \qquad \mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$$

$$A = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

i.e. $\forall j = 1 \dots p \qquad f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{nj}e'_n$

$$\forall j = 1 \dots p \qquad f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{nj}e'_n$$

Si $$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$$

$$\forall j = 1 \dots p \qquad f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \dots + a_{nj}e'_n$$

Si $\qquad u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$

alors $\quad f(u) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_p f(e_p)$

$$\forall j = 1 \dots p \qquad f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{nj}e'_n$$

Si $\qquad u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$

alors $\quad f(u) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_p f(e_p)$

$$= \sum_{j=1}^{p}\left(\lambda_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e'_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\lambda_j\right)e'_i$$

$$\forall j = 1 \dots p \qquad f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{nj}e'_n$$

Si $\qquad u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$

alors $\quad f(u) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_p f(e_p)$

$$= \sum_{j=1}^{p}\left(\lambda_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e'_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\lambda_j\right)e'_i$$

Donc $\quad M_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1p}\lambda_p \\ \vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{np}\lambda_p \end{pmatrix}$

Suite de la démonstration.

$$\begin{aligned}
M_{\mathscr{B}'}(f(u)) &= \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1p}\lambda_p \\ \vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{np}\lambda_p \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \\
&= M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) M_{\mathscr{B}}(u)
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 1 (suite)

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

$$P = 5 + 2X - 4X^2 + X^3$$

Proposition

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

Bases : $\mathscr{B}$ $\mathscr{B}'$ $\mathscr{B}''$

$$M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}''}(g)M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}''}(g \circ f)$$

Proposition

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

Bases : $\mathscr{B}$ $\mathscr{B}'$ $\mathscr{B}''$

$$M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}''}(g)M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}''}(g \circ f)$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (5x+3y, 5x+2y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x-y, 3x) \end{aligned}$$

Notation

$$M_{\mathscr{B}}(f) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}}(f)$$

Notation

$$M_{\mathscr{B}}(f) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}}(f)$$

Remarques

(i) $M_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) =$

Notation

$$M_{\mathscr{B}}(f) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}}(f)$$

Remarques

(i) $M_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$

(ii) $M_{\mathscr{B}}(f \circ f) =$

Notation

$$M_{\mathscr{B}}(f) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}}(f)$$

Remarques

(i) $M_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$

(ii) $M_{\mathscr{B}}(f \circ f) = [M_{\mathscr{B}}(f)]^2$

Proposition

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$$

Proposition

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$$

$$M_{\mathscr{B}}(\lambda f + \mu g) = \lambda M_{\mathscr{B}}(f) + \mu M_{\mathscr{B}}(g)$$

Cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Proposition

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & M_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$$

$$M_{\mathscr{B}}(\lambda f + \mu g) = \lambda M_{\mathscr{B}}(f) + \mu M_{\mathscr{B}}(g)$$

$$M_{\mathscr{B}}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}}(g) M_{\mathscr{B}}(f)$$

Cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux.

Proposition

$$A = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f)$$

$$f \text{ isomorphisme} \iff A \text{ inversible}$$

Proposition

$$A = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f)$$

f isomorphisme $\iff$ A inversible

$$M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(f^{-1}) = A^{-1} = [M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f)]^{-1}$$

Démonstration.

Si f est un isomorphisme alors :

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(f^{-1})M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) &= M_{\mathscr{B}\mathscr{B}}(f^{-1}\circ f) \\ &= M_{\mathscr{B}\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) \qquad = I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f)M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(f^{-1}) &= M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}'}(f\circ f^{-1}) \\ &= M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_F) \qquad = I_n \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(f^{-1})$ est l'inverse de $M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f)$

$AB = BA = I_n \Longrightarrow A$ **est inversible et** $A^{-1} = B$

Réciproquement, si A est inversible alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(F,E) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ g & \longmapsto & M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(g) = A^{-1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{B}}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(g) M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) = A^{-1}A = I_n \\ = M_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ h & \longmapsto & M_{\mathscr{B}}(h) \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad g \circ f = \mathrm{Id}_E$$

Réciproquement, si A est inversible alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(F,E) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ g & \longmapsto & M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(g) = A^{-1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{B}'}(f \circ g) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(g) = AA^{-1} &= I_n \\ &= M_{\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_F) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(F) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ h & \longmapsto & M_{\mathscr{B}'}(h) \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

Réciproquement, si A est inversible alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(F,E) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ g & \longmapsto & M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(g) = A^{-1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{B}'}(f \circ g) = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f) M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(g) = AA^{-1} &= I_n \\ &= M_{\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_F) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(F) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ h & \longmapsto & M_{\mathscr{B}'}(h) \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

Ainsi f est bijective, de réciproque g. $\square$

II. Représentations matricielles

Définitions

(i) Application linéaire canoniquement associée à A : Application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ dont A est la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

(ii) $\ker A = \ker f \qquad \operatorname{im} A = \operatorname{im} f$

Définitions

(i) Application linéaire canoniquement associée à A :
Application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ dont A est la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

(ii) $\ker A = \ker f \qquad \operatorname{im} A = \operatorname{im} f$

Remarque

$$A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \ker A \underset{\text{sev}}{\subseteq} \mathbb{K}^p \\ \operatorname{im} A \underset{\text{sev}}{\subseteq} \mathbb{K}^n \end{cases}$$

Définitions

(i) Application linéaire canoniquement associée à A : Application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ dont A est la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

(ii) $\ker A = \ker f \qquad \operatorname{im} A = \operatorname{im} f$

Exemple 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarques

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{pmatrix}$$

(i) $\operatorname{im} A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_p)$

(ii) $\ker A = \{ X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0 \}$

Remarques

$$A = (C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_p)$$

$$\begin{array}{ll} (i) & \operatorname{im} A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_p) \\ (ii) & \ker A = \{ X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0 \} \end{array}$$

Opérations élémentaires

- sur les colonnes pour l'image et
- sur les lignes pour le noyau.

Théorème du rang

A : matrice à p colonnes.

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = p$$

Théorème du rang

A : matrice à p colonnes.

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = p$$

Démonstration. Soit f associée à A :

$$f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

Théorème du rang :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim \mathbb{K}^p \qquad \square$$

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Le rang de A est la dimension du sev de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A.

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\left(C_1, \ldots, C_p\right) = \operatorname{rg}\left(C_1, \ldots, C_p\right)$$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Le rang de A est la dimension du sev de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A.

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p)$$

Remarque

Le rang de A est donc la dimension de son image :

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{im} A$$

C'est aussi le rang de l'application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A.

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Le rang de A est la dimension du sev de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A.

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_p) = \operatorname{rg}(C_1, \ldots, C_p)$$

Remarque

Le rang de A est donc la dimension de son image :

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{im} A = \operatorname{rg} f$$

C'est aussi le rang de l'application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A.

Corollaire

Soit A une matrice carrée de taille (n, n).

(i) $\exists B \quad BA = I_n \quad \Longrightarrow \quad A$ inversible, $B = A^{-1}$

(ii) $\exists B \quad AB = I_n \quad \Longrightarrow \quad A$ inversible, $B = A^{-1}$

Corollaire

Soit A une matrice carrée de taille (n, n).

(i) $\exists B \quad BA = I_n \quad \Longrightarrow \quad A$ inversible, $B = A^{-1}$

(ii) $\exists B \quad AB = I_n \quad \Longrightarrow \quad A$ inversible, $B = A^{-1}$

Démonstration.

Corollaire

Soit A une matrice carrée de taille (n, n).

(i) $\exists B \quad BA = I_n \quad \Longrightarrow \quad A$ inversible, $B = A^{-1}$

(ii) $\exists B \quad AB = I_n \quad \Longrightarrow \quad A$ inversible, $B = A^{-1}$

<u>Démonstration</u>.

$\square$

Proposition

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$$

T est inversible ssi les a_{ii} sont non-nuls.

Proposition

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$$

T est inversible ssi les a_{ii} sont non-nuls.

Proposition

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$$

T est inversible ssi les a_{ii} sont non-nuls.

Si $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ est inversible alors $T^{-1} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

Proposition

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$$

T est inversible ssi les a_{ii} sont non-nuls.

Si $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ est inversible alors $T^{-1} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

Si $T \in \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$ est inversible alors $T^{-1} \in \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.

T est inversible

$$\iff \qquad \operatorname{rg} T = n$$

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.

T est inversible

$$\iff \qquad \operatorname{rg} T = n$$

$\iff$ Tous les coefficients diagonaux de T sont non-nuls.

<u>Démonstration</u>. Soit $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.

T est inversible

$$\begin{aligned} &\iff \quad \operatorname{rg} T = n \\ &\iff \quad \text{Tous les coefficients diagonaux de } T \text{ sont non-nuls.} \end{aligned}$$

Démontrons que dans ce cas la matrice inverse T^{-1} est triangulaire supérieure.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ inversible.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & TM \end{array}$$

- f est bien définie.

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ inversible.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & TM \end{array}$$

- f est bien définie.
- f est linéaire.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ inversible.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & TM \end{array}$$

- f est bien définie.
- f est linéaire.
- f est injective.

$$TM = 0 \quad \Longrightarrow \quad T^{-1}TM = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = 0$$

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ inversible.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & TM \end{array}$$

- f est bien définie.
- f est linéaire.
- f est injective.
- f est bijective d'après le théorème du rang.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ inversible.

$$\begin{aligned} f : \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto TM \end{aligned}$$

- f est bien définie.
- f est linéaire.
- f est injective.
- f est bijective.

$$I_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \quad \Longrightarrow \quad \exists S \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \quad TS = I_n$$

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ inversible.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & TM \end{array}$$

- f est bien définie.
- f est linéaire.
- f est injective.
- f est bijective.

$$I_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \quad \Longrightarrow \quad \exists S \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \quad TS = I_n$$

Donc $S = T^{-1}$, et $T^{-1} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} T \text{ inversible} \quad &\Longrightarrow \quad {}^tT \text{ inversible et } {}^tT \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \\ &\Longrightarrow \quad ({}^tT)^{-1} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \\ &\Longrightarrow \quad {}^t(T^{-1}) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \\ &\Longrightarrow \quad T^{-1} \in \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

□

Corollaire

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

D est inversible ssi tous les λ_i sont non-nuls.

Dans ce cas :

$$D^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

III. Changement de base

A. Matrices de passage

B. Théorèmes

C. Matrices équivalentes

D. Matrices semblables

E. Trace d'un endomorphisme

A. Matrices de passage

Définition 1

Matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$: $P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$

Matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple 4

$$E = \mathbb{R}^2$$

$$\mathscr{B}_c = (e_1, e_2) \qquad \begin{aligned} e_1 &= (1,0) \\ e_2 &= (0,1) \end{aligned}$$

$$\mathscr{B} = (u_1, u_2) \qquad \begin{aligned} u_1 &= (2,1) \\ u_2 &= (5,3) \end{aligned}$$

$P_{\mathscr{B}_c \mathscr{B}}$: matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}$.

Remarque

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base $\mathscr{B}$ est la matrice $P_{\mathscr{B}_c\mathscr{B}}$ dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathscr{B}$.

$$\mathscr{B} : \begin{cases} u_1 = (2,1) \\ u_2 = (5,3) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad P_{\mathscr{B}_c\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 4 (suite)

$$E = \mathbb{R}^2$$

$$\mathscr{B} = (u_1, u_2) \qquad u_1 = (2,1)$$
$$u_2 = (5,3)$$

$u = (5,3)$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad M_{\mathscr{B}_c}(u) = P_{\mathscr{B}_c \mathscr{B}} M_{\mathscr{B}}(u)$$

Définition 2

$$P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

Proposition

$$\boxed{X = PX'}$$

Proposition

$$X = M_{\mathscr{B}}(u) \qquad P = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} \qquad X' = M_{\mathscr{B}'}(u)$$

$$\boxed{X = PX'}$$

Proposition

$$X = M_{\mathscr{B}}(u) \qquad P = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} \qquad X' = M_{\mathscr{B}'}(u)$$

$$\boxed{X = PX'}$$

Démonstration.

Proposition

$$X = M_{\mathscr{B}}(u) \qquad P = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} \qquad X' = M_{\mathscr{B}'}(u)$$

$$\boxed{X = PX'}$$

Démonstration.

$\square$

Proposition

$$\left(P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}$$

Proposition

$$(P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}$$

Démonstration.

Id_E est un isomorphisme donc $M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E)$ est inversible et :

$$[M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E)]^{-1} = M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E^{-1}) = M_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) \qquad \square$$

Proposition

$$X = M_{\mathscr{B}}(u) \qquad P = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} \qquad X' = M_{\mathscr{B}'}(u)$$

$$\boxed{X = PX'}$$

Proposition

$$\left(P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}$$

Remarque

$$X = PX' \qquad \Longleftrightarrow \qquad X' = P^{-1}X$$

Exemple 4 (suite)

$$E = \mathbb{R}^2$$

$$\mathscr{B}_c = (e_1, e_2) \qquad \begin{aligned} e_1 &= (1,0) \\ e_2 &= (0,1) \end{aligned}$$

$$\mathscr{B} = (u_1, u_2) \qquad \begin{aligned} u_1 &= (2,1) \\ u_2 &= (5,3) \end{aligned}$$

$$P = P_{\mathscr{B}_c\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad Q = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}_c} = ?$$

▷ Exercice 5.

$E = \mathbb{R}^2 \qquad u_1 = (2, 1) \qquad u_2 = (2, -1)$

Donner les matrices de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ et de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique.

▷ Exercice 6.

Reproduire l'exercice précédent avec

$E = \mathbb{R}^3 \qquad \mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$

$u_1 = (1, 1, 1) \qquad u_2 = (1, 1, 0) \qquad u_3 = (1, 0, 0)$

Proposition (Réciproque de la précédente)

P matrice inversible de taille (n, n).

Alors les colonnes de P forment une base de $\mathbb{K}^n$, et P est la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ à cette base.

Proposition (Réciproque de la précédente)

P matrice inversible de taille (n, n).

Alors les colonnes de P forment une base de $\mathbb{K}^n$, et P est la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ à cette base.

Remarque

Les matrices de passage sont les matrices inversibles.

Proposition (Réciproque de la précédente)

P matrice inversible de taille (n, n).

Alors les colonnes de P forment une base de $\mathbb{K}^n$, et P est la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ à cette base.

<u>Démonstration</u>. Soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ associé à P.
P est inversible donc f est un isomorphisme.
L'image d'une base par un isomorphisme est une base.
Donc les colonnes de P forment une base de $\mathbb{K}^n$.
P est la matrice de passage de la base canonique à cette base. $\square$

III. Changement de base

Rappel

$$E \xrightarrow{\quad f \quad} F \xrightarrow{\quad g \quad} G$$

$$M_{\mathscr{B}_? \mathscr{B}_?}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}_? \mathscr{B}_?}(g) M_{\mathscr{B}_? \mathscr{B}_?}(f)$$

Rappel

$$E_{\mathscr{B}_1} \xrightarrow{\quad f \quad} F_{\mathscr{B}_2} \xrightarrow{\quad g \quad} G_{\mathscr{B}_3}$$

$$M_{\mathscr{B}_?\mathscr{B}_?}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}_?\mathscr{B}_?}(g) M_{\mathscr{B}_?\mathscr{B}_?}(f)$$

Rappel

$$E_{\mathscr{B}_1} \xrightarrow[M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)]{f} F_{\mathscr{B}_2} \xrightarrow[M_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(g)]{g} G_{\mathscr{B}_3}$$

$$M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_3}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_3}(g) M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)$$

$$E \xrightarrow{\quad f \quad} F$$

$$E \xrightarrow[\quad f \quad]{} F$$

$$E_{\mathscr{B}_1} \xrightarrow[M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)]{f} F_{\mathscr{B}_2}$$

$$E_{\mathscr{B}'_1} \xrightarrow[f]{M_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(f)} F_{\mathscr{B}'_2}$$

$$
\begin{tikzcd}
E_{\mathscr{B}_1} \arrow[r, "f"] \arrow[r, swap, "M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)"] \arrow[d, swap, "\mathrm{Id}_E"] & F_{\mathscr{B}_2} \\
E_{\mathscr{B}'_1} \arrow[r, "M_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(f)"] \arrow[r, swap, "f"] & F_{\mathscr{B}'_2} \arrow[u, swap, "\mathrm{Id}_F"]
\end{tikzcd}
$$

$$f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$$

$$\begin{tikzcd}
E_{\mathscr{B}_1} \arrow[rr, "f", "M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}_1}"] & & F_{\mathscr{B}_2} \\
E_{\mathscr{B}'_1} \arrow[rr, "M_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(f)", "f"'] & & F_{\mathscr{B}'_2} \arrow[u, "P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}'_2}", "\mathrm{Id}_F"']
\end{tikzcd}$$

$$f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
E_{\mathscr{B}_1} \arrow[r, "f", "M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}_1}"] & F_{\mathscr{B}_2} \\
E_{\mathscr{B}'_1} \arrow[r, "M_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(f)", "f"'] & F_{\mathscr{B}'_2} \arrow[u, "P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}'_2}", "\mathrm{Id}_F"']
\end{tikzcd}$$

$$M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f) = M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(\mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E)$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
E_{\mathscr{B}_1} \arrow[r, "f", "M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}_1}"] & F_{\mathscr{B}_2} \\
E_{\mathscr{B}'_1} \arrow[r, "M_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(f)", "f"'] & F_{\mathscr{B}'_2} \arrow[u, "P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}'_2}", "\mathrm{Id}_F"']
\end{tikzcd}$$

$$M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f) = M_{\mathscr{B}'_2\mathscr{B}_2}(\mathrm{Id}_F)\,M_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(f)\,M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}'_1}(\mathrm{Id}_E)$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
E_{\mathscr{B}_1} \arrow[rr, "f", "M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}_1}"] & & F_{\mathscr{B}_2} \\
E_{\mathscr{B}'_1} \arrow[rr, "M_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(f)", "f"'] & & F_{\mathscr{B}'_2} \arrow[u, "P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}'_2}", "\mathrm{Id}_F"']
\end{tikzcd}$$

$$M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f) = P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}'_2} M_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}'_2}(f) P_{\mathscr{B}'_1\mathscr{B}_1}$$

Théorème de changement de base

$f : E \to F$ linéaire

$\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_1'$ bases de E $\qquad$ $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_2'$ bases de F

Alors :

$$M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f) = P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_2'} M_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_2'}(f) P_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_1}$$

Démonstration.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"'] & F \\ E \arrow[r, "f"'] & F \arrow[u, "\mathrm{Id}_F"'] \end{tikzcd}$$

$$f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$$

Démonstration.

$$
\begin{tikzcd}
E_{\mathscr{B}_1} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"'] & & F_{\mathscr{B}_2} \\
E_{\mathscr{B}_1'} \arrow[rr, "f"'] & & F_{\mathscr{B}_2'} \arrow[u, "\mathrm{Id}_F"']
\end{tikzcd}
$$

$$f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$$

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}
E_{\mathscr{B}_1} \arrow[rrr, "f", "M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_1}"] & & & F_{\mathscr{B}_2} \\
E_{\mathscr{B}_1'} \arrow[rrr, "M_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_2'}(f)", "f"'] & & & F_{\mathscr{B}_2'} \arrow[u, "P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_2'}", "\mathrm{Id}_F"']
\end{tikzcd}$$

$$f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$$

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
E_{\mathscr{B}_1} \arrow[r, "f", "M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_1}"] & F_{\mathscr{B}_2} \\
E_{\mathscr{B}_1'} \arrow[r, "M_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_2'}(f)", "f"'] & F_{\mathscr{B}_2'} \arrow[u, "P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_2'}", "\mathrm{Id}_F"']
\end{tikzcd}$$

$$M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f) = M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(\mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E)$$

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
E_{\mathscr{B}_1} \arrow[r, "f", "M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_1}"] & F_{\mathscr{B}_2} \\
E_{\mathscr{B}_1'} \arrow[r, "M_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_2'}(f)", "f"'] & F_{\mathscr{B}_2'} \arrow[u, "P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_2'}", "\mathrm{Id}_F"']
\end{tikzcd}$$

$$M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f) = M_{\mathscr{B}_2'\mathscr{B}_2}(\mathrm{Id}_F)M_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_2'}(f)M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_1'}(\mathrm{Id}_E)$$

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}
E_{\mathscr{B}_1} \arrow[rr, "f"', "M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_1}"] & & F_{\mathscr{B}_2} \\
E_{\mathscr{B}_1'} \arrow[rr, "M_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_2'}(f)", "f"'] & & F_{\mathscr{B}_2'} \arrow[u, "P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_2'}", "\mathrm{Id}_F"']
\end{tikzcd}$$

$$M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f) = P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_2'} M_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_2'}(f) P_{\mathscr{B}_1'\mathscr{B}_1} \qquad \square$$

Remarque : le cas d'un endomorphisme

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
E_{\mathscr{B}} \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"', "P^{-1}"] & E_{\mathscr{B}} \\
E_{\mathscr{B}'} \arrow[r, "A'", "f"'] & E_{\mathscr{B}'} \arrow[u, "P", "\mathrm{Id}_E"']
\end{tikzcd}$$

$$A = PA'P^{-1}$$

Corollaire

$$\boxed{A = PA'P^{-1}}$$

Corollaire

$$A = M_{\mathscr{B}}(f) \qquad A' = M_{\mathscr{B}'}(f) \qquad P = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$$

$$\boxed{A = PA'P^{-1}}$$

Remarque

$$A = PA'P^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A' = P^{-1}AP$$

Exemple 4 (suite)

$$E = \mathbb{R}^2 \qquad \begin{aligned} u_1 &= (2,1) \\ u_2 &= (5,3) \end{aligned}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-10y, 3x-10y) \end{array}$$

▷ Exercice 7. (Suite des exercices précédents)

Dans les deux cas, donner la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathscr{B}$.
Vérifier ensuite le corollaire.

$$a.\quad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y, 2x+2y) \end{array}$$

$$b.\quad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, x-z, x-y) \end{array}$$

III. Changement de base

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes s'il existe P et Q inversibles telles que :

$$A = PBQ$$

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes s'il existe P et Q inversibles telles que :

$$A = PBQ$$

Remarques

(i) Il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes s'il existe P et Q inversibles telles que :

$$A = PBQ$$

Remarques

(i) Il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

(ii) Deux matrices représentant la même application linéaire sont équivalentes.

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes s'il existe P et Q inversibles telles que :

$$A = PBQ$$

Remarques

(i) Il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

(ii) Deux matrices représentant la même application linéaire sont équivalentes.
La réciproque est vraie.

Définition

$A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes s'il existe P et Q inversibles telles que :

$$A = PBQ$$

Proposition

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire dans certaines bases.

Proposition

$A, B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ $\quad f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ associée à A.

$$A = M_{\mathscr{C}_1 \mathscr{C}_2}(f)$$

Si $B \sim A$ alors il existe :

- une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{K}^p$
- une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{K}^n$

telles que :

$$B = M_{\mathscr{B}_1 \mathscr{B}_2}(f)$$

Démonstration. $A = M_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}(f) \quad B = M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)$

$$A = PBQ \quad \text{donc} \quad B = P^{-1}AQ^{-1}$$

Démonstration. $A = M_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}(f) \quad B = M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)$

$$A = PBQ \quad \text{donc} \quad B = P^{-1}AQ^{-1}$$

$$M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f) = M_{\mathscr{C}_2\mathscr{B}_2}(\mathrm{Id}_F)M_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}(f)M_{\mathscr{B}_1\mathscr{C}_1}(\mathrm{Id}_E)$$

$$\iff \qquad B = P_{\mathscr{B}_2\mathscr{C}_2}AP_{\mathscr{C}_1\mathscr{B}_1}$$

Démonstration. $A = M_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}(f) \quad B = M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)$

$$A = PBQ \quad \text{donc} \quad B = P^{-1}AQ^{-1}$$

$$M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f) = M_{\mathscr{C}_2\mathscr{B}_2}(\mathrm{Id}_F)M_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}(f)M_{\mathscr{B}_1\mathscr{C}_1}(\mathrm{Id}_E)$$

$$\iff \qquad B = P_{\mathscr{B}_2\mathscr{C}_2}AP_{\mathscr{C}_1\mathscr{B}_1}$$

On choisit les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ telles que :

$$P = M_{\mathscr{C}_2}(\mathscr{B}_2) \qquad Q^{-1} = M_{\mathscr{C}_1}(\mathscr{B}_1)$$

(Ce sont les colonnes de P et de Q^{-1}.)

Démonstration. $A = M_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}(f) \quad B = M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)$

$$A = PBQ \quad \text{donc} \quad B = P^{-1}AQ^{-1}$$

$$M_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f) = M_{\mathscr{C}_2\mathscr{B}_2}(\mathrm{Id}_F)M_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}(f)M_{\mathscr{B}_1\mathscr{C}_1}(\mathrm{Id}_E)$$

$$\iff \qquad B = P_{\mathscr{B}_2\mathscr{C}_2}AP_{\mathscr{C}_1\mathscr{B}_1}$$

On choisit les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ telles que :

$$P = M_{\mathscr{C}_2}(\mathscr{B}_2) \qquad Q^{-1} = M_{\mathscr{C}_1}(\mathscr{B}_1)$$

(Ce sont les colonnes de P et de Q^{-1}.)

D'après le théorème de changement de base B est la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. $\square$

Définition

$r \in \mathbb{N} \qquad r \leqslant n \quad$ et $\quad r \leqslant p$

$$J_r = J_{npr} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rappel

Le rang d'une matrice est la dimension de l'ev engendré par ses colonnes.

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$$

Rappel

Le rang d'une matrice est la dimension de l'ev engendré par ses colonnes.

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$$

Exemple

$$\operatorname{rg} J_{npr} = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = r$$

Rappel

Le rang d'une matrice est :

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\left(C_1, \dots, C_p\right)$$

Théorème

$A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Rappel

Le rang d'une matrice est :

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$$

Théorème

$A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Corollaire

$$A \sim B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$$

Lemme

$f \in \mathscr{L}(E, F)$

Si $\operatorname{rg} f = r$ alors il existe des bases de E et de F dans lesquelles la matrice de f est J_{npr}.

$$\exists \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \qquad M_{\mathscr{B}_1 \mathscr{B}_2}(f) = J_r$$

Lemme

$f \in \mathscr{L}(E, F)$

Si $\operatorname{rg} f = r$ alors il existe des bases de E et de F dans lesquelles la matrice de f est J_{npr}.

$$\exists \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \qquad M_{\mathscr{B}_1 \mathscr{B}_2}(f) = J_r$$

Démonstration.

Lemme

$f \in \mathscr{L}(E, F)$

Si $\operatorname{rg} f = r$ alors il existe des bases de E et de F dans lesquelles la matrice de f est J_{npr}.

$$\exists \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \qquad M_{\mathscr{B}_1 \mathscr{B}_2}(f) = J_r$$

Démonstration.

$\square$

Théorème

$A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Théorème

$A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ associée à A.

Théorème

$A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ associée à A.

Alors $\operatorname{im} A = \operatorname{im} f$ donc $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f$.

Théorème

$A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ associée à A.

Supposons que : $\operatorname{rg} A = r$

Il existe des bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ telles que

$$M_{\mathscr{B}_1 \mathscr{B}_2}(f) = J_{npr}$$

Donc $A = PJ_{npr}Q$, donc $A \sim J_{npr}$.

Théorème

$A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ associée à A.

Supposons que : $A \sim J_{npr}$

Il existe P et Q inversibles telles que $A = PJ_{npr}Q$.

$A = PJ_{npr}Q$ donne $f = \varphi \circ g \circ \psi$

donc $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$

donc $r = \operatorname{rg} g = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A$. $\square$

Théorème

$A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \iff \qquad A \sim J_{npr}$$

Corollaire

$$A \sim B \qquad \iff \qquad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$$

Théorème

$A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Corollaire

$$A \sim B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$$

Démonstration.

$$J_{npr} \sim A \sim B$$

Théorème

$A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Corollaire

$$A \sim B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$$

Démonstration.

$$A \sim J_{npr} \sim B$$

$\square$

Théorème

$A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Corollaire

$$A \sim B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$$

Remarques

(i) Quelles que soient les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$:

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} M_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f)$$

Théorème

$A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Corollaire

$$A \sim B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$$

Remarques

(ii) Les classes d'équivalences des matrices de taille (n, p) sont en bijection avec l'ensemble $\{0, \ldots, m\}$ où $m = \operatorname{Min}\{n, p\}$.

Théorème

$A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \sim J_{npr}$$

Corollaire

$$A \sim B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$$

Remarques

(ii) Elles sont représentées par les matrices $J_{np0}, \ldots, J_{npm}$.

III. Changement de base

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Remarques

(i) La relation de semblance est une relation d'équivalence.

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Remarques

(i) La relation de semblance est une relation d'équivalence.

(ii) Si deux matrices sont semblables alors elles sont équivalentes.
La réciproque est fausse en général.

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Remarques

(iii) Deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans deux bases différentes.

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Remarques

(iii) $B = P^{-1}AP$

Soit f l'endomorphisme associé à A

Soit $\mathscr{B}$ la base définie par les colonnes de P.

Alors $B = M_{\mathscr{B}}(f)$.

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Proposition

Deux matrices semblables ont même trace.

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Proposition

Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration. $A = PBP^{-1}$

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Proposition

Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration. $A = PBP^{-1}$

$\square$

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Exemple 4 (suite)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Exemple 5

On considère des matrices de taille $(2, 2)$.

a. Démontrer que les matrices E_{11} et E_{22} sont semblables, de même que E_{12} et E_{21}.

b. Les matrices E_{11} et E_{12} sont-elles semblables ?

c. Les matrices E_{12} et $2E_{12}$ sont-elles semblables ?

▷ Exercice 8.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le noyau et l'image de A.

b. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est B.

c. En déduire que A et B sont semblables.

III. Changement de base

A. Matrices de passage

B. Théorèmes

C. Matrices équivalentes

D. Matrices semblables

E. Trace d'un endomorphisme

Définition

E ev de dimension finie $\qquad f \in \mathscr{L}(E)$

La trace de f est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E.

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}\left(M_{\mathscr{B}}(f)\right) \quad \text{où } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.$$

Définition

E ev de dimension finie $\qquad f \in \mathscr{L}(E)$

La trace de f est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E.

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}\left(M_{\mathscr{B}}(f)\right) \quad \text{où } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.$$

Remarques

(i) En effet la trace de la matrice de f ne dépend pas de la base choisie.

Définition

E ev de dimension finie $\qquad f \in \mathscr{L}(E)$

La **trace** de f est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E.

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}\left(M_{\mathscr{B}}(f)\right) \quad \text{où } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.$$

Remarques

(i) Si A et B sont deux matrices de f dans deux bases différentes alors :

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr}\left(PBP^{-1}\right) = \operatorname{tr} B$$

Définition

E ev de dimension finie $\qquad f \in \mathscr{L}(E)$

La trace de f est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E.

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}\left(M_{\mathscr{B}}(f)\right) \quad \text{où } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.$$

Remarques

(ii) f et g endomorphismes de E :

$$\operatorname{tr}(f \circ g) = \operatorname{tr}(g \circ f)$$

Définition

E ev de dimension finie $\qquad f \in \mathscr{L}(E)$

La **trace** de f est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E.

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}\left(M_{\mathscr{B}}(f)\right) \quad \text{où } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.$$

Exemple 6

(i) Trace de l'identité.

(ii) Trace de la dérivation $d : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$.

$$\operatorname{tr}\left(\mathrm{Id}_E\right) = \qquad\qquad\qquad \operatorname{tr} d =$$

Définition

E ev de dimension finie $\qquad f \in \mathscr{L}(E)$

La trace de f est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E.

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}\left(M_{\mathscr{B}}(f)\right) \quad \text{où } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.$$

Exemple 6

(i) Trace de l'identité.

(ii) Trace de la dérivation $d : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$.

$$\operatorname{tr}\left(\mathrm{Id}_E\right) = \dim E \qquad\qquad \operatorname{tr} d =$$

Définition

E ev de dimension finie $\qquad f \in \mathscr{L}(E)$

La trace de f est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E.

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}\left(M_{\mathscr{B}}(f)\right) \quad \text{où } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.$$

Exemple 6

(i) Trace de l'identité.

(ii) Trace de la dérivation $d : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$.

$$\operatorname{tr}\left(\mathrm{Id}_E\right) = \dim E \qquad\qquad \operatorname{tr} d = 0$$

Définition

E ev de dimension finie $\qquad f \in \mathscr{L}(E)$

La trace de f est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E.

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}\left(M_{\mathscr{B}}(f)\right) \quad \text{où } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.$$

▷ Exercice 9.

E ev de dimension finie $\qquad p$ projecteur

Démontrer que : $\quad \operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$

Remarque

A, $B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

A et B sont équivalentes par lignes si on peut passer de l'une à l'autre par opérations élémentaires sur les lignes.

Remarque

$A,\ B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

A et B sont équivalentes par lignes si on peut passer de l'une à l'autre par opérations élémentaires sur les lignes.

Ceci a lieu ssi il existe des matrices d'opérations élémentaires $E_1, \ldots, E_m$ telles que :

$$A = E_1 \ldots E_m B$$

Remarque

A, $B \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

A et B sont équivalentes par lignes si on peut passer de l'une à l'autre par opérations élémentaires sur les lignes.

Ceci a lieu ssi il existe des matrices d'opérations élémentaires $E_1, \dots, E_m$ telles que :

$$A = E_1 \dots E_m B$$

Ou ssi il existe P inversible telle que

$$A = PB$$

Remarque

$A \underset{L}{\sim} B$: A et B équivalentes par lignes

$$\iff \quad \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad A = PB$$

Remarque

$A \underset{L}{\sim} B$: A et B équivalentes par lignes

$\iff \quad \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad A = PB$

$A \underset{C}{\sim} B$: A et B équivalentes par colonnes

$\iff \quad \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad A = BQ$

Remarque

$A \underset{L}{\sim} B$: A et B équivalentes par lignes

$$\iff \quad \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad A = PB$$

$A \underset{C}{\sim} B$: A et B équivalentes par colonnes

$$\iff \quad \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad A = BQ$$

$A \underset{LC}{\sim} B$: A et B équivalentes par lignes et colonnes

$$\iff \quad \exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad A = PBQ$$

Remarque

$A \underset{L}{\sim} B$: A et B équivalentes par lignes

$$\iff \quad \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad A = PB$$

$A \underset{C}{\sim} B$: A et B équivalentes par colonnes

$$\iff \quad \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad A = BQ$$

$A \underset{LC}{\sim} B$: A et B équivalentes par lignes et colonnes

$$\iff \quad \exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad A = PBQ$$

$$\iff \quad A \sim B$$

Proposition

A et B équivalentes par lignes et par colonnes.
$\Longleftrightarrow$ A et B équivalentes.

Proposition

A et B équivalentes par lignes et par colonnes.
$\iff$ A et B équivalentes.

Démonstration.

$$A \underset{LC}{\sim} B \iff A = E_1 \cdots E_k B F_1 \cdots F_m$$

$E_1, \ldots, E_k$, $F_1, \ldots, F_m$ matrices élémentaires.

Proposition

A et B équivalentes par lignes et par colonnes.
$\Longleftrightarrow$ A et B équivalentes.

Démonstration.

$$\begin{aligned} A \underset{LC}{\sim} B \quad &\Longleftrightarrow \quad A = E_1 \cdots E_k B F_1 \cdots F_m \\ &\Longleftrightarrow \quad A = PBQ \end{aligned}$$

$E_1, \ldots, E_k, F_1, \ldots, F_m$ matrices élémentaires.
$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$

Proposition

A et B équivalentes par lignes et par colonnes.
$\iff$ A et B équivalentes.

Démonstration.

$$\begin{aligned} A \underset{LC}{\sim} B &\iff A = E_1 \cdots E_k B F_1 \cdots F_m \\ &\iff A = PBQ \\ &\iff A \sim B \end{aligned}$$ $\square$

$E_1, \dots, E_k, F_1, \dots, F_m$ matrices élémentaires.
$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ $\qquad$ $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$

Remarque

L'algorithme du pivot de gauss montre que toute matrice est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite par ligne.

Remarque

L'algorithme du pivot de gauss montre que toute matrice est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite par ligne.

Appliqué aux colonnes il montre que toute matrice est équivalente par lignes et colonnes à une matrice J_{npr}.

Remarque

L'algorithme du pivot de gauss montre que toute matrice est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite par ligne.

Appliqué aux colonnes il montre que toute matrice est équivalente par lignes et colonnes à une matrice J_{npr}.

Ceci démontre de nouveau que toute matrice est équivalente à une matrice J_{npr}.

Remarque

L'algorithme du pivot de gauss montre que toute matrice est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite par ligne.

Appliqué aux colonnes il montre que toute matrice est équivalente par lignes et colonnes à une matrice J_{npr}.

Ceci démontre de nouveau que toute matrice est équivalente à une matrice J_{npr}.

Comme l'équivalence conserve le rang alors r est le rang de la matrice.

Proposition

A et B équivalentes par lignes et par colonnes.
$\iff A$ et B équivalentes.

Corollaire

Les opérations sur les lignes et les colonnes ne changent pas le rang d'une matrice.

Proposition

A et B équivalentes par lignes et par colonnes.
$\iff A$ et B équivalentes.

Corollaire

Les opérations sur les lignes et les colonnes ne changent pas le rang d'une matrice.

Démonstration.

$$A \underset{LC}{\sim} B \quad \Longrightarrow \quad A \sim B \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B \qquad \square$$

Proposition

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne changent pas son noyau.
Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ne changent pas son image.

Proposition

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne changent pas son noyau.
Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ne changent pas son image.

Démonstration. $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

Pour tout matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \qquad AX = 0 \iff PAX = 0$$

Ceci montre que $\ker A = \ker(PA)$.

Proposition

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne changent pas son noyau.
Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ne changent pas son image.

Démonstration. $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

Pour toute matrice $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$:

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & QX \end{array}$$

Proposition

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne changent pas son noyau.

Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ne changent pas son image.

Démonstration. $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

Pour toute matrice $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \operatorname{im} A &= \{\, AX \mid X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})\} \\ &= \{\, AQX \mid X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})\} = \operatorname{im}(AQ) \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure $\square$

Exemple 7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 2x + 4y + 4z \\ x + y + 3z \\ 4x + 2y + 3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$S : \begin{cases} 2x + 4y + 4z = c_1 \\ x + y + 3z = c_2 \\ 4x + 2y + 3z = c_3 \end{cases}$$

$$\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Alors $\operatorname{rg} \mathscr{F} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} f$

Remarque

Le rang d'un système linéaire est le nombre de pivots du système échelonné réduit qui lui est équivalent.

Théorème

A matrice

f application linéaire canoniquement associée à A

S système linéaire $AX = B$

$\mathscr{F}$ famille des colonnes de A

Alors $$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} \mathscr{F}$$

Théorème

A matrice

f application linéaire canoniquement associée à A

S système linéaire $AX = B$

$\mathscr{F}$ famille des colonnes de A

Alors $$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} \mathscr{F}$$

Démonstration.

$$\operatorname{Vect}(\mathscr{F}) = \operatorname{im} A = \operatorname{im} f$$

Donc $$\operatorname{rg} \mathscr{F} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f$$

Démonstration. $\operatorname{rg} S = \operatorname{rg} A$

$$S: \ AX = B \quad \sim \quad RX = B'$$

Soit R échelonnée réduite équivalente par ligne à A.

Alors $\operatorname{rg} R = \operatorname{rg} A$.

Soit $r = \operatorname{rg} S$: $\quad r$ est le nombre de pivots de R.

Les colonnes de R engendrent un sev de dimension r donc $\operatorname{rg} S = \operatorname{rg} A$. $\square$

Remarque

$$\operatorname{rg} \mathscr{F} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} f$$

Méthode

Calcul du rang de A : pivot de Gauss.

Rappel : Opérations élémentaires

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ $\quad$ $(C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j)$

$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ avec $\lambda \neq 0$ $\quad$ $(C_i \leftarrow \lambda C_i)$ avec $\lambda \neq 0$

$(L_i \leftrightarrow L_j)$ $\quad$ $(C_i \leftrightarrow C_j)$

Exemple 7 (suite)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + 4y + 4z \\ x + y + 3z \\ 4x + 2y + 3z \end{pmatrix}$$

$$S : \begin{cases} 2x + 4y + 4z = c_1 \\ x + y + 3z = c_2 \\ 4x + 2y + 3z = c_3 \end{cases}$$

$$\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Alors $\operatorname{rg} \mathscr{F} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} f = ?$

Exemple 7 (suite)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 2x+4y+4z \\ x+\ \ y+3z \\ 4x+2y+3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$S : \begin{cases} 2x+4y+4z = c_1 \\ x+\ \ y+3z = c_2 \\ 4x+2y+3z = c_3 \end{cases} \qquad \mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Alors $\qquad \operatorname{rg} \mathscr{F} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} f = 3$

▷ Exercice 10.

Calculer le rang des objets suivants :

$$\mathscr{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$\triangleright$ Exercice 10.

Calculer le rang des objets suivants :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

▷ Exercice 10.

Calculer le rang des objets suivants :

$$S : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 7x + 3y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

▷ Exercice 10.

Calculer le rang des objets suivants :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

▷ Exercice 10.

Calculer le rang des objets suivants :

$$\mathscr{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} i \\ 1+2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+3i \\ 1+2i \end{pmatrix} \right)$$

▷ Exercice 10.

Calculer le rang des objets suivants :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y+z \\ x+t \\ 0 \\ y+z \\ z+t \end{pmatrix} \end{array}$$

IV. Rangs

Proposition : Rang maximal

A matrice

f application linéaire canoniquement associée à A

S système linéaire $AX = B$

$\mathscr{F}$ famille des colonnes de A

(i) A est inversible

$\iff$ *(ii)* S est un système de Cramer

$\iff$ *(iii)* f est un isomorphisme

$\iff$ *(iv)* $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{K}^n$

Démonstration.

Tous ces objets sont de même rang :

A matrice (n, n)

S système de n équations à n inconnues

f application linéaire $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$\mathscr{F}$ famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$

Démonstration.

Tous ces objets sont de même rang :

A matrice (n, n)

$$\operatorname{rg} A = n \implies A \text{ inversible}$$

S système de n équations à n inconnues

$$\operatorname{rg} S = n \implies S \text{ de Cramer}$$

f application linéaire $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$$\operatorname{rg} f = n \implies f \text{ isomorphisme}$$

$\mathscr{F}$ famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$

$$\operatorname{rg} \mathscr{F} = n \implies \mathscr{F} \text{ base de } \mathbb{K}^n$$

□

Remarque

Soit A une matrice carrée de taille (n, n). Alors :

$$
\begin{aligned}
& \textit{(i)}\ A \text{ est inversible} \\
\iff\ & \textit{(ii)}\ \operatorname{rg} A = n \\
\iff\ & \textit{(iii)}\ \ker A = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\
\iff\ & \textit{(iv)}\ \operatorname{im} A = \mathbb{K}^n
\end{aligned}
$$

Remarque

Soit A une matrice carrée de taille (n, n). Alors :

$$
\begin{aligned}
& \textit{(i)}\ A \text{ est inversible} \\
\iff \quad & \textit{(ii)}\ \operatorname{rg} A = n \\
\iff \quad & \textit{(iii)}\ \ker A = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\
\iff \quad & \textit{(iv)}\ \operatorname{im} A = \mathbb{K}^n
\end{aligned}
$$

Démonstration.

$$A \text{ inversible} \iff f \text{ isomorphisme} \qquad \square$$

Rappel

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^t A$$

Rappel

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^t\!A$$

<u>Démonstration</u>.

$$\operatorname{rg} A = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = P J_{npr} Q$$

Rappel

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} A = r \quad &\iff \quad A = PJ_{npr}Q \\ &\iff \quad {}^tA = {}^tQ\,{}^tJ_{npr}\,{}^tP \end{aligned}$$

Rappel

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^tA$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\, A = r \quad &\iff \quad A = PJ_{npr}Q \\ &\iff \quad {}^tA = {}^tQ\, {}^tJ_{npr}\, {}^tP \end{aligned}$$

- ${}^tQ$ et ${}^tP$ sont inversibles car P et Q le sont,
- ${}^tJ_{npr}$ est de rang r $\quad ({}^tJ_{npr} = J_{pnr})$

Rappel

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$$

<u>Démonstration</u>.

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} A = r \quad &\iff \quad A = PJ_{npr}Q \\ &\iff \quad {}^tA = {}^tQ\,{}^tJ_{npr}\,{}^tP \end{aligned}$$

- ${}^tQ$ et ${}^tP$ sont inversibles car P et Q le sont,
- ${}^tJ_{npr}$ est de rang r $\quad ({}^tJ_{npr} = J_{pnr})$

Donc ${}^tA$ est de rang r. $\square$

Rappel

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$$

Remarques

(i) $\operatorname{rg} A = \dim\left(\operatorname{Vect}\left(L_1, \ldots, L_n\right)\right)$

(ii) La transposition est autorisée dans le calcul du rang d'une matrice.

IV. Rangs

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$A = (a_{ij})_{(i,j)\in I\times J} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} I = (1,\dots,n) \\ J = (1,\dots,p) \end{cases}$$

On appelle matrice extraite

ou sous-matrice de A une matrice :

$$A = (a_{ij})_{(i,j)\in I'\times J'} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} I' \subseteq I \\ J' \subseteq J \end{cases}$$

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$A = (a_{ij})_{(i,j)\in I\times J} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} I = (1, \dots, n) \\ J = (1, \dots, p) \end{cases}$$

On appelle matrice extraite

ou sous-matrice de A une matrice :

$$A = (a_{ij})_{(i,j)\in I'\times J'} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} I' \subseteq I \\ J' \subseteq J \end{cases}$$

Ceci revient à supprimer des lignes et des colonnes de A.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Quelles matrices ci-dessous sont extraites de A ?

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Quelles matrices ci-dessous sont extraites de A ?

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ ✓ $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Quelles matrices ci-dessous sont extraites de A ?

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \checkmark \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \checkmark \qquad \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Quelles matrices ci-dessous sont extraites de A ?

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Quelles matrices ci-dessous sont extraites de A ?

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \checkmark \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \checkmark \qquad (1) \checkmark \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Quelles matrices ci-dessous sont extraites de A ?

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ ✗ $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Quelles matrices ci-dessous sont extraites de A ?

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓ (1) ✓ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ ✗ $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✗ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Quelles matrices ci-dessous sont extraites de A ?

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ ✓ $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓ $\quad \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ ✓ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ ✗ $\quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✗ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ ✓

Proposition

Si $\operatorname{rg} A = r$ alors toute matrice extraite de A est de rang inférieur ou égal à r.

Proposition

Si $\operatorname{rg} A = r$ alors toute matrice extraite de A est de rang inférieur ou égal à r.

<u>Démonstration</u>. On note :

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij})_{(i,j)\in I\times J} \\ A_1 &= (a_{ij})_{(i,j)\in I\times J'} \\ A' &= (a_{ij})_{(i,j)\in I'\times J'} \end{aligned}$$

A_1 a moins de colonnes que A donc : $\operatorname{rg} A_1 \leqslant \operatorname{rg} A$
A' a moins de lignes que A_1 donc : $\operatorname{rg} A' \leqslant \operatorname{rg} A_1$

Par transitivité $\operatorname{rg} A' \leqslant \operatorname{rg} A$. $\square$

Proposition

Une matrice A est de rang r si et seulement si :

- Il existe une sous-matrice de A inversible de taille (r, r).
- Pour tout $s > r$ aucune sous-matrice de A de taille (s, s) n'est inversible.

Proposition

Une matrice A est de rang r si et seulement si :

- Il existe une sous-matrice de A inversible de taille (r, r).
- Pour tout $s > r$ aucune sous-matrice de A de taille (s, s) n'est inversible.

Ainsi une matrice est de rang r si et seulement si sa plus grande sous-matrice inversible est de taille (r, r).

Démonstration. Supposons que : $\operatorname{rg} A = r$

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij})_{(i,j)\in I\times J} & \operatorname{rg} A &= r \\ \exists A_1 &= (a_{ij})_{(i,j)\in I\times J'} & \operatorname{rg} A_1 &= r \\ \exists A' &= (a_{ij})_{(i,j)\in I'\times J'} & \operatorname{rg} A' &= r \end{aligned}$$

A_1 : r colonnes de A formant une famille de rang r.

A' : r lignes de A_1 formant une famille de rang r.

A' est de taille (r, r) et de rang r donc A' est inversible.

Démonstration. Supposons que : $\operatorname{rg} A = r$

$$\begin{aligned}
A &= (a_{ij})_{(i,j)\in I\times J} & \operatorname{rg} A &= r \\
\exists A_1 &= (a_{ij})_{(i,j)\in I\times J'} & \operatorname{rg} A_1 &= r \\
\exists A' &= (a_{ij})_{(i,j)\in I'\times J'} & \operatorname{rg} A' &= r
\end{aligned}$$

A_1 : r colonnes de A formant une famille de rang r.

A' : r lignes de A_1 formant une famille de rang r.

A' est de taille (r, r) et de rang r donc A' est inversible.

Il existe une sous-matrice de A inversible de taille (r, r).

Démonstration. Supposons que : $\operatorname{rg} A = r$

Soit $s > r$.

Si une sous-matrice de A de taille (s, s) est inversible, alors elle est de rang s.

Ce n'est pas possible car c'est une sous-matrice inversible de A qui est de rang r.

Démonstration. Supposons que : $\operatorname{rg} A = r$

Soit $s > r$.

Si une sous-matrice de A de taille (s, s) est inversible, alors elle est de rang s.

Ce n'est pas possible car c'est une sous-matrice inversible de A qui est de rang r.

Pour tout $s > r$ aucune sous-matrice de A de taille (s, s) n'est inversible.

Démonstration. Supposons que **la plus grande sous-matrice inversible de A est de taille (r, r).**

Toute sous-matrice inversible de A est de rang au plus $\operatorname{rg} A$. Donc : $r \leqslant \operatorname{rg} A$.

Démonstration. Supposons que **la plus grande sous-matrice inversible de A est de taille (r, r).**

Toute sous-matrice inversible de A est de rang au plus $\operatorname{rg} A$. Donc : $r \leqslant \operatorname{rg} A$.

Supposons que $r < \operatorname{rg} A$.

Démonstration. Supposons que **la plus grande sous-matrice inversible de A est de taille (r, r).**

Toute sous-matrice inversible de A est de rang au plus $\operatorname{rg} A$. Donc : $r \leqslant \operatorname{rg} A$.

Supposons que $r < \operatorname{rg} A$. Soit $s = \operatorname{rg} A$.

D'après la première partie de cette démonstration A admet une sous-matrice inversible de taille (s, s).

Impossible par hypothèse car $s > r$

Donc $\operatorname{rg} A = r$. $\square$

Prochain chapitre

Chapitre C1

Probabilités